Læremidler og arbeidsformer i matematikk 1T vgs

En casestudie i prosjektet ARK&APP, matematikk 1T, studieforberedende utdanningsprogram, videregående skole

JAN ARILD DOLONEN (UIO), MARGRETHE NAALSUND (NMBU) OG ANDERS KLUGE (UIO)

UiO Universitetet i Oslo

Norges miljø- og biovitenskapelige universitet

2015

ISBN: 978-82-569-7012-4 (trykt)

ISBN: 978-82-569-7013-1 (elektronisk)

Trykk: Reprosentralen, UiO

Web-versjon tilgjengelig på www.udir.no

FORORD

Utdanningsdirektoratet har lyst ut oppdraget med forskning på læremidler på oppdrag fra Kunnskapsdepartementet. En av utfordringene er å få kunnskap om hvordan læremidler bidrar til ulike former for læringsprosesser for å nå kompetansemålene i læreplanen for fagene i skolen.

Institutt for pedagogikk (IPED) ved Det utdanningsvitenskapelige fakultet (Universitetet i Oslo, UiO) er ansvarlig for denne forskningen i et treårig prosjekt på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet.

Formålet med forskningsprosjektet er å få økt kunnskap om hvilken betydning læremidlene har for undervisning og læring etter kompetansemålene i gjeldene læreplaner. Prosjektet undersøker ulike praksiser i klasserommet i fire fag: matematikk, naturfag, engelsk og samfunnsfag. I alt gjennomføres det 12 casestudier på tre ulike nivåer i grunnutdanningen (mellomtrinnet, ungdomsskole og videregående skole).

Vi takker alle lærere, elever samt skoleledere og skoleeiere som har deltatt i casen i denne rapporten. Gjennom deltakelsen har dere gitt oss mulighet til å få innsikt i hvilken rolle trykte og digitale læremidler spiller i planlegging, gjennomføring og evaluering av undervisning.

Vi takker også Utdanningsdirektoratet for konstruktiv oppfølging og deres eksternt oppnevnte forsker Tom Wikman ved Åbo Akademi og ekstern leser Ole-Johan Eikeland for nyttige kommentarer til arbeidet.

Vi håper at disse delrapportene kan være av interesse for både forskere, lærere, skoleledere, beslutningstakere og andre som jobber med problemstillinger knyttet til hvordan lærere og elever arbeider med læremidler.

Prosjektet har en egen styringsgruppe som er ledet av professor Sten Ludvigsen ved Universitetet i Oslo. Prosjektet *ARK&APP* ledes av forsker Øystein Gilje ved UiO.

Prosjektleder
Øystein Gilje

Leder av styringsgruppa
Sten Ludvigsen

Oslo, mai, 2015.

http://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/

Læremidler og arbeidsformer i matematikk 1T vgs

En casestudie i prosjektet *ARK&APP*, matematikk, Vg1.

Innholdsfortegnelse

Sammendrag

I forskningsprosjektet *ARK&APP* (2013–2015) blir det gjennomført to kvantitative og 12 kvalitative casestudier. Lærerens valg og bruk av læremidler og læringsressurser samt elevenes valg av læringsressurser er sentralt i prosjektet *ARK&APP*. Caserapportene studerer spesielt hvordan læremidler og læringsressurser benyttes i avgrensede undervisningsforløp, ved å legge vekt på den funksjonen de har i interaksjonen mellom lærer og elev, og hvordan de skaper engasjement og læring hos elevene.

Rapporten som her foreligger, beskriver det andre av tre kvalitative caser i matematikk, med utgangspunkt i kompetansemålene i algebra. Casen er gjennomført i løpet av 3 uker høsten 2014 i matematikk 1T studieforberedende utdanningsprogram ved en videregående skole på Østlandet, der én lærer og en gruppe på 21 elever jobber med ulike læremidler i algebra. Datamaterialet i denne casen består av pre- og posttest, observasjoner og videoopptak av ulike former for klasseromsinteraksjon og engasjement, samt intervjuer med utvalgte elever og lærer. Tre hovedspørsmål er grunnleggende for analysen:

- Hvordan benyttes læremidlene i undervisningsopplegget?
- Hvilken funksjon har bruken av læremidlene i interaksjonen mellom lærer og elever?
- Hvordan bidrar bruk av læremidlene til engasjement og læring hos elever?

Resultatene viser at undervisningsformene helklasseundervisning og individuelt arbeid dominerte undervisningsopplegget. Helklasseundervisning besto i hovedsak av klassediskusjoner der læreren problematiserte temaer og fikk elevene til å uttrykke og diskutere ulike måter å tenke matematikk på. Læreren brukte også en del tid på plenumsforelesning, spesielt når han skulle introdusere et nytt tema. Ved helklasseundervisning var det først og fremst tavla som ble brukt, men også til en viss grad læreboka. Når elevene jobbet individuelt, var det i hovedsak læreboka, oppgaveheftet og kladdeboka som ble brukt. Elevene brukte også digitale læremidler og ressurser som GeoGebra og Graph. Ved individuelt arbeid gikk læreren rundt og veiledet elevene.

Læreren var opptatt av å illustrere at det fantes flere måter å tenke matematisk på, og han brukte ulike læremidler og ressurser for å vise dette. Dermed fikk elevene prøve ut ulike metoder for samme type oppgaver. Når elevene jobbet individuelt eller i par med

læremidlene, brukte de fasiten eller sjekket svaret med parkameraten. Om de gjentatte ganger fikk galt svar, så tilkalte de læreren.

Elevene virket fokuserte og engasjerte gjennom hele undervisningsperioden. De jobbet konsentrert med oppgaver og deltok aktivt i diskusjoner som læreren initierte. De digitale læremidlene ga mer dynamiske interaksjonsformer og noe mer engasjement hos elevene. Imidlertid kan vi ikke på bakgrunn av pre- og posttestene fastslå om elevene har hatt signifikant læringsutbytte.

Det som tydeligst preger casen, er hvordan læreren insisterte på matematisk forståelse hos elevene. I tråd med prinsipper for god matematikkundervisning (NCTM, 2014) la læreren vekt på å stimulere til engasjement, begrepsforståelse og resonneringskompetanse. I helklasseundervisningen utfordret han elevene til å resonnere, diskutere og løse problemer sammen, og ved individuelt arbeid la læreren opp til at elevene skulle prøve ulike metoder og representasjoner for løsning. Lærerens undervisningspraksis er viktig for at elevene skal kunne utvikle fleksibilitet i løsningsstrategier, dypere prosedyrekunnskap og bedre forståelse av matematiske fenomener bak prosedyrene. Variert bruk av læremidler og ressurser gir flere innganger til fagstoffet og spiller derfor en viktig rolle som virkemiddel for begrepsdannelse og matematisk forståelse.

Summary

Within the frame of the research project *ARK&APP* (2013–2015) two quantitative surveys and 12 qualitative case studies are conducted. The present case study is the second of three case studies in mathematics.

In this study we follow an upper secondary school class of 21 students and their teacher in 1T mathematics in the general studies program working with algebra. We observed them through 7 lessons spread over 3 weeks in September 2014. The data includes pre- and post-tests evaluating students' learning outcomes, observations and video recordings of various forms of classroom interactions as well as the interviews with the students of the focus group and the teacher. Three research questions guide the study:

- How are educational resources used in teaching practices?
- What role do various educational resources play in interactions between students and their teacher?
- How do educational resources foster engagement and learning among students?

The results show that whole-class teaching and individual work are dominating activities. Whole-class teaching consisted mostly of discussions where the teachers problematized themes, which gave the students the possibility to express and discuss different ways of thinking mathematically. The teacher also spent time on lecturing when introducing new themes within algebra. In whole-class teaching he mainly used the whiteboard and to a certain extent textbooks. When students worked individually they mainly used their textbook with tasks and notebooks but also digital learning resources such as GeoGebra and Graph. Their teacher would then guide them in interpreting and solving their tasks.

The teacher's intention was through use of various educational resources and representations to illustrate alternative ways to think mathematically. The students applied various methods for similar tasks, and the teacher used visualizations on the whiteboard to problematize concepts. When the students worked individually or in pairs with learning resources they spent considerable time on validating their solutions − mainly by checking the correct answer provided on the last pages of the textbook or by considering their peer's solutions. The teacher was notified if a student repeatedly got the incorrect answer.

The students were focused and engaged throughout the period. They concentrated on their tasks and participated actively in discussions initiated by their teacher. The digital learning resources provided more dynamic interactions and more engagement between the students. However, we cannot determine whether the students had significant learning outcomes from pre- to post-tests.

The most prominent characteristic of this case study is how the teacher insisted on mediating the students' mathematical understanding. In line with principles and standards for mathematical teaching (NCTM, 2014) the teacher emphasized productive disposition, conceptual understanding and adaptive reasoning. In whole-class teaching he challenged the students to reason, discuss and collaboratively solve tasks. When students worked individually the teacher facilitated them in trying out different methods and representations for similar tasks. Such competencies are important in terms of flexibility in solution strategies, deep procedural knowledge and conceptual understanding underlying mathematical procedures. Variation in use of educational resources provides different lenses to understand the subject matter and plays an important part in terms of conceptual development and deep mathematical understanding.

1 Innledning

I forskningsprosjektet *ARK&APP* (2013–2015) blir det gjennomført to kvantitative spørreundersøkelser og 12 kvalitative casestudier. Lærerens valg og bruk av læremidler og læringsressurser samt elevenes valg av læringsressurser er sentralt i prosjektet. Caserapportene studerer spesielt hvordan læremidler og læringsressurser benyttes i avgrensede undervisningsforløp, ved å legge vekt på den funksjonen de har i interaksjonen mellom lærer og elev, og hvordan de skaper engasjement og læring hos elevene.

Rapporten som her foreligger, beskriver den andre av tre caser i matematikk i forskningsprosjektet. Casen er gjennomført høsten 2014 på 1. trinn ved en videregående skole på Østlandet. Tre hovedspørsmål er grunnleggende for analysen:

- Hvordan benyttes læremidlene i undervisningsopplegget?
- Hvilken funksjon har bruken av læremidler i interaksjonen mellom lærer og elever?
- Hvordan bidrar bruk av læremidlene til engasjement og læring hos elever?

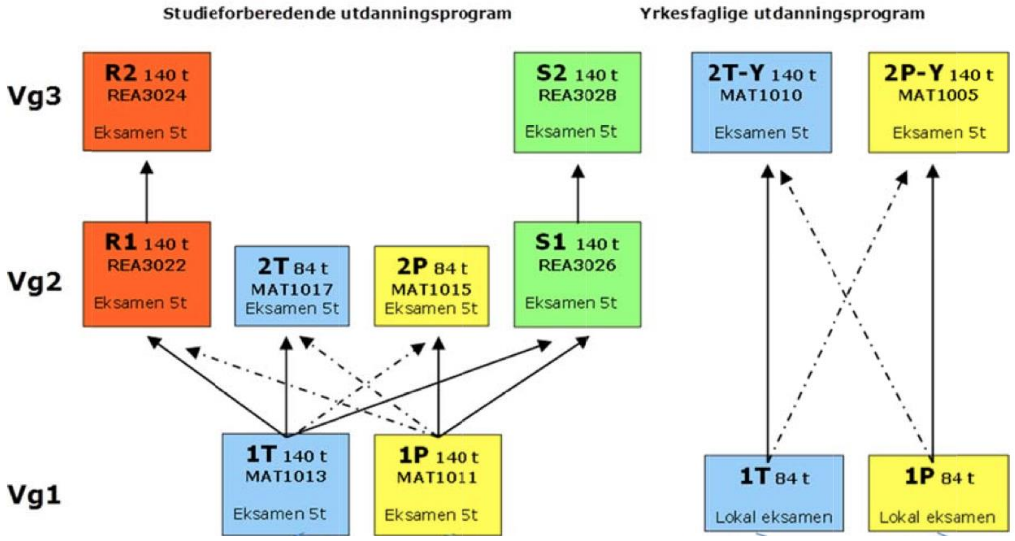
Denne rapporten gir først en kort beskrivelse av casen som er gjennomført og de spesifikke kompetansemålene som er knyttet til den. Vi vil også redegjøre kort for de ulike variantene av matematikk i videregående opplæring. I andre del presenteres kunnskapsstatus på feltet. Tredje del redegjør for forskningsdesign, datainnsamling og metoder. Fjerde del av rapporten presenterer funnene. Her ser vi på hvordan ulike typer læremidler blir brukt i undervisningen, hvilken funksjon læremidlene hadde i interaksjonen mellom læreren og elevene og mellom elevene, og hvilket læringsutbytte elevene hadde. Den siste delen drøfter også hvordan læremidlene bidrar til deltagelse, engasjement og læring hos elevene.

1.1 Beskrivelse av casen

I denne rapporten følger vi én lærer og en gruppe på 21 elever på 1. trinn videregående skole, som jobber med ulike læremidler i hovedområdet *tall og algebra* i matematikk 1T studieforberedende utdanningsprogram. Casen gikk over 3 uker i forkant av høstferien 2014. Læreren sto for undervisningen, mens forskerne observerte. Forskerne innhentet samtykkeerklæringer fra læreren og alle elevene involvert i casen før datainnsamlingen startet. Vi var tre forskere som samarbeidet om datainnsamlingen. Elevene startet med å gjennomføre en pretest for å kartlegge kunnskapsnivå. Deretter fulgte i alt 7 klokketimer undervisning, som også inkluderte en kapittelprøve. Forskerne gjorde observasjonsnotater og videoopptak av undervisningen og elevenes arbeid. Vi var minst to forskere til stede i hver økt gjennom hele perioden. Til slutt gjennomførte elevene en posttest, og deretter ble utvalgte elever og læreren intervjuet.

1.2 Kompetansemål og undervisningsforløpet i matematikk

Videregående opplæring i Norge tilbyr studieforberedende og yrkesfaglige utdanningsprogram. Studieforberedende opplæring skal gi studiekompetanse for å komme inn på høyskoler og universiteter, mens yrkesfaglig opplæring skal gi yrkeskompetanse med eller uten fag- eller svennebrev. Skolen der casestudien ble gjennomført, tilbyr begge utdanningsprogrammene. I matematikk må alle elever på første trinn (Vg1) enten velge teoretisk (1T) eller praktisk (1P) matematikk (se Figur 1). På studieforberedende programmer er matematikk også obligatorisk på andre trinn (Vg2), og da er det fire tilbud å velge mellom: R1, 2T, 2P og S1. R-matte betyr matematikk for realfag og velges av dem som har tatt 1T, mens S-matte betyr matematikk for samfunnsfag og kan velges både av elever som har hatt 1T og 1P på første trinn. På tredje trinn (Vg3) kan elever på studieforberedende utdanningsprogrammer velge mellom to programfag i matematikk (R2 eller S2). Elever som har valgt yrkesfaglige utdanningsprogrammer, kan ta påbygging til generell studiekompetanse det tredje året (Vg3). Elevene må da ta et ekstra matematikkurs, og kan velge mellom to fag (2P-Y eller 2T-Y). De fleste elever som tar påbygg, velger som regel den enkleste matematikken (2P-Y) (Utdanningsdirektoratet, 2014).



Figur. 1 Fagtilbudet i matematikk i videregående opplæring i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2014).[1]

Undervisningsforløpet som beskrives i denne casen, strakk seg over 7 skoletimer à 60 minutter. I løpet av undervisningen gikk læreren gjennom deler av kapittel 2 og 3 i læreboka *Sinus 1T* (kap. 2.6−3.6; Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch & Hals, 2009). Kapittel 2 omhandler tallregning og algebra, og kapittel 3 omhandler formler, likninger og ulikheter. Begge disse kapitlene er tilknyttet kompetansemål for opplæringen i hovedområdet *tall og algebra* for 1T[2]:

- *tolke, bearbeide, vurdere og drøfte det matematiske innhaldet i ulike tekstar*
- *vurdere, velje og bruke matematiske metodar og verktøy til å løyse problem frå ulike fag og samfunnsområde og reflektere over, vurdere og presentere løysingane på ein formålstenleg måte*
- *rekne med rotuttrykk, potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, faktorisere kvadratiske uttrykk, bruke kvadratsetningane og lage fullstendige kvadrat*
- *omforme uttrykk og løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både ved rekning og med digitale verktøy*
- *omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det matematiske problemet både med og utan digitale verktøy, presentere og grunngje løysinga og vurdere gyldigheitsområde og avgrensingar*

[1] Utdanningsdirektoratet har på oppdrag fra Kunnskapsdepartementet fått i oppdrag å sende forslag på høring om å avvikle matematikk 2T som et fagtilbud i matematikk i videregående opplæring. Begrunnelsen for å fjerne matematikk 2T er at dette alternativet i praksis ikke velges av noen elever. Frist på høringen er 20. august 2015, og KD foreslår at avviklingen av 2T matematikk trer i kraft fra skoleåret 2016/2017.

[2] Hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=1858830316&kmsn=2088314978

2 Læremidler og arbeidsformer

Hovedmålet med det norske utdanningsløpet i matematikk er å utdanne matematisk kompetente elever. Dette kapitlet starter (avsnitt 2.1) med å definere hva vi mener med *matematisk kompetanse*. Med dette som basis definerer vi viktige prinsipper for god matematikkundervisning. Dette vil, sett i sammenheng, fungere som et rammeverk for diskusjonen i de påfølgende avsnittene, hvor vi ser på litteratur som er sentral for å belyse forskningsspørsmålene. I avsnitt 2.2 ser vi nærmere på tidligere studier knyttet til hvordan det undervises i matematikk i norske klasserom generelt. Deretter ser vi på hvordan læremidler (både digitale, papirbaserte og andre former) brukes i matematikkundervisningen. I avsnitt 2.3 drøfter vi elevers matematiske kompetanse knyttet til bruken av læremidler, og ser spesielt på arbeidsformer og undervisningsmetoder. Avsnitt 2.2 og 2.3 vil være tett knyttet til emneområdet algebra i og med at vi har hatt et spesielt fokus på dette temaet.[3] Algebra er et effektivt verktøy for å utforske, analysere og representere matematiske begreper og ideer, samt for å beskrive og modellere forhold og sammenhenger i hverdagsfenomener (Kieran, 2007; NCTM, 2008). Mye av matematikken i ungdomsskolen og videregående skole bygger på algebra. En solid algebraisk kompetanse er derfor essensielt for å lykkes med videre opplæring både i matematikkfaget og i fag og studier som bygger på algebraisk kunnskap, slik som for eksempel fysikk, ingeniørstudier, informatikk, finans og medisin.

2.1 Matematisk kompetanse og prinsipper for god matematikkundervisning

Et mye sitert rammeverk for matematisk kompetanse (f.eks. Jensen & Nortvedt, 2013; NCTM, 2000; NCTM, 2014) er modellen presentert i Kilpatrick, Swafford og Findell (2001, s. 116): «… recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen mathematical proficiency to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully.» Vi oversetter «mathematical proficiency» med matematisk kompetanse. Videre definerer de dette begrepet gjennom fem delkompetanser, som de understreker er tett sammenvevde og avhengige av hverandre i læreprosessen. God læring i matematikk innebærer å utvikle disse fem delkompetansene i et tett samspill. De fem delkompetansene er:

[3] Dette fokuset er gjennomgående i de tre matematikkcasene.

1. Begrepsforståelse (*Conceptual understanding*)[4]
2. Prosedyreferdigheter (*Procedural fluency*)
3. Anvendelse (*Strategic competence*)
4. Resonneringferdigheter (*Adaptive reasoning*)
5. Engasjement (*Productive disposition*)

Begrepsforståelse handler om å forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner, prosedyrer og relasjoner. Prosedyreferdigheter innebærer å utføre prosedyrer nøyaktig, effektivt og fleksibelt. Anvendelse går ut på å formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer. Resonnementsferdigheter omhandler evne til logisk tenkning, refleksjon, forklaringer og begrunnelser. Engasjement dreier seg om å være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk. Denne siste delkompetansen omhandler med andre ord affektive faktorer spesifikt og understreker hvor viktig dette er for læring og hvor tett det er vevd sammen med andre kompetanser i læreprosessen. Affektive faktorer handler om variabler som for eksempel. motivasjon, holdninger, følelser, selvoppfatning og mestringsforventning.

PISA-undersøkelsen fra 2012 undersøkte 15-åringers holdninger til matematikk, med den begrunnelse at slike holdninger er en viktig del av matematisk kompetanse og nær knyttet til hvordan elevene presterer på matematikkoppgaver (Jensen & Nortvedt, 2013). De fant en klar positiv sammenheng mellom prestasjoner og henholdsvis motivasjon, selvoppfatning, mestringsforventning, og vilje til å arbeide med matematikken. Norske elever uttrykker den laveste selvoppfatningen i Norden (som igjen ligger under OECD-gjennomsnittet). Selv om mestringsforventningen ligger på OECD-gjennomsnittet, så viser en lavere andel av de norske elevene en positiv mestringsforventning knyttet til utsagn med algebraisk innhold (som for eksempel å finne x i en annengradslikning). Videre peker PISA-rapporten på en sterkere matematikkangst i 2012 enn i 2003. Matematikkangst har en sterk negativ effekt på matematikkresultatet. Denne negative effekten er enda større i de nordiske landene enn i OECD og aller størst for norske elever.

I løpet av det siste tiåret har vi sett et stadig økende fokus på affektive faktorers betydning for læring generelt og i matematikk spesielt. Dette tydeliggjøres i blant annet strategiene «Motivasjon og mestring for bedre læring» (Kunnskapsdepartementet, 2012) og «Fra matteskrekk til mestring» (Kunnskapsdepartementet, 2011). Denne utviklingen gjør vårt

[4] Vi har valgt å ta med de opprinnelige begrepene, da det er en utfordring å finne norske oversettelser som fullstendig dekker meningsinnholdet i de engelske begrepene.

forskningsspørsmål om hvordan bruk av læremidlene bidrar til engasjement og læring, særlig relevant.

Elevers læring i matematikk «depends fundamentally on what happens inside the classroom as teachers and learners interact over the curriculum» (Ball & Forzani, 2011, s. 17). Med basis i Kilpatrick et al. (2001) sine kompetanser, har National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) utarbeidet åtte prinsipper for god undervisningspraksis, som skal fungere som et rammeverk for å styrke læring og undervisning i matematikk (NCTM, 2014). Disse åtte undervisningsprinsippene er:

1. Lage tydelige matematiske mål for å gjøre læreprosessen mer fokusert
2. Integrere oppgaver som legger til rette for resonnering og problemløsing
3. Bruke og se sammenhenger mellom ulike representasjoner
4. Legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs
5. Stille målrettede spørsmål
6. Bygge prosedyreferdigheter basert på begrepsforståelse
7. Gi elevene produktiv motstand og mulighet til å strekke seg i læreprosessen
8. Diagnostisere og bruke elevenes tenkning

Disse åtte undervisningsprinsippene bygger altså på tanken om at læring i matematikk inkluderer utviklingen av de fem delkompetansene (Kilpatrick et al., 2001), og at disse delkompetansene er tett sammenvevd i læreprosessen. Kilpatrick et al. sine kompetanser og NCTM's åtte undervisningsprinsipper vil fungere som et rammeverk for dataanalyser og tilknyttede diskusjoner i denne rapporten. De to følgende avsnittene vil derfor også knyttes opp mot de nevnte kompetansene og undervisningsprinsippene. I avsnitt 2.2 ser vi nærmere på hvordan matematikk undervises i norsk skole og hva som kjennetegner bruk av læremidler. I avsnitt 2.3 diskuterer vi tidligere forskning knyttet til undervisningsformer og bruk av læremidler, og ser det i lys av de åtte undervisningsprinsippene som igjen reflekterer målet om å utdanne matematisk kompetente elever.

2.2 Arbeidsformer og bruk av læremidler i matematikkundervisningen

Både internasjonale, komparative studier som TIMSS og PISA[5] (Grønmo et al., 2012; Olsen, 2013) og flere nasjonale klasseromsstudier (Bergem, 2009; Klette, 2009; Klette, 2013) peker på at norske arbeidsformer i matematikk er preget av at læreren står ved tavla og kateteret og går gjennom temaer fra læreboka, og at elevene deretter jobber mye på egen hånd med oppgaver. Helklasseundervisningen i Norge er altså preget av at læreren står ved tavla og styrer samtalen med klassen. Lærerne gir god emosjonell støtte og har stor omsorg for elevene, men det går bort mye tid på ikke-faglig aktivitet (Olsen, 2013). Elevaktiviteten er preget av individuelt arbeid med oppgaveløsing og lite gruppearbeid (Klette, 2013). Den komparative TIMSS-studien bekrefter at en slik arbeidsform er mer utbredt i Norge enn i mange andre land. Den viser også at lærerne i liten grad spør elevene om å forklare svar (Grønmo et al., 2012). Videre legges det lite vekt på aktiviteter som kan hjelpe elevene til å reflektere og resonnere i faget, jamfør resonnementskompetanse som beskrevet i avsnitt 2.1 (Olsen, 2013). Sandvik, Buland, Engvik, Fjørtoft & Langseth (2013) rapporterer i en relativt ny delrapport fra prosjektet *Forskning på individuell vurdering i skolen (FIVIS)* at samtaleformen i helklasse på videregående skole (Vg1) er preget av en såkalt IRE *(initiation, response, evaluation)*-struktur. Det vil si at læreren initierer en samtale med et spørsmål (I), eleven svarer (R), og læreren kommenterer eller bedømmer elevens svar (E). Spørsmål som fremmer matematisk mening og matematiske relasjoner, er lite brukt, og «…samtalene med enkeltelever er preget av faktiske utsagn og beskrivelser av matematiske prosedyrer» (Sandvik et al., 2013, s. 70).

En rekke studier viser med andre ord at undervisningspraksisen i matematikk i norske klasserom ikke bygger på viktige undervisningsprinsipper som gir grunnlag for matematisk kompetanse slik vi beskrev det i avsnitt 2.1.

Når det gjelder bruken av læremidler, så viser tidligere forskning at læreboka er det viktigste læremiddelet i skolen både i Norge og internasjonalt (f.eks. Juuhl, Hontvedt & Skjelbred, 2010; Knudsen et al., 2011; Pepin, Gueudet & Trouche, 2013; Skjelbred, Solstad & Aamotsbakken, 2005). Knudsen et al. (2011) påpeker at forskning på bruk av læremidler i liten grad er knyttet til observasjoner i klasserommet eller intervjuer av brukerne av læremidlene. Det gjør at det er vanskelig å konkludere hvordan læremidler brukes i praksis.

[5] Norge deltar i to store internasjonale komparative studier, Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) og Programme for International Student Assessment (PISA). Se www.timss.no og www.pisa.no for mer informasjon om studiene.

Pepin, Gueudet og Trouche (2013) viser i en internasjonal oversiktsstudie knyttet til læreres bruk av læremidler i matematikk, at bruken av lærebøker er i tråd med læreplaner i matematikk. Dette oppleves som viktig for lærerne fordi det gir deres undervisning legitimitet ut fra institusjonelle krav. De påpeker at hvis lærerne får nye lærebøker − gjerne i forbindelse med en reform, og der bøkene i høy grad bryter med etablert praksis − kan det føre til at lærerne velger andre løsninger, som for eksempel å skape egne læremidler lokalt.

Ifølge PISA 2012-studien er IKT som hjelpemiddel i matematikk langt mer brukt i Norge enn i OECD (Olsen, 2013). Den norske studien *ITU Monitor 2011* (Egeberg et al., 2012) viser at bruken av IKT er økende, men samtidig øker bruken av IKT i matematikk mindre enn i de andre fagene. I neste avsnitt ser vi nærmere på bruken av læremidler og drøfter dette i lys av rammeverket presentert i avsnitt 2.1.

2.3 Elevers matematiske kompetanse knyttet til arbeidsformer og bruk av læremidler

Norske elevers prestasjoner i matematikk ligger under det internasjonale gjennomsnittet og er svake sammenliknet med andre land som vi normalt sammenlikner oss med. Særlig gjelder dette emneområdet algebra (Grønmo et al., 2012; Naalsund, 2012; Nortvedt, 2013). Norske elever presterer generelt svakt på oppgaver som krever algebraisk kunnskap i løsningsprosessen, alt fra rutineoppgaver som krever en begrenset prosedyrekunnskap, til mer omfattende problemløsningsoppgaver som krever andre kompetanser (for eksempel evne til å velge og å anvende fornuftige prosedyrer på en fleksibel og effektiv måte, forstå prosedyrer og tilknyttede begreper, kunne argumentere for sine resonnementer). For eksempel peker Naalsund (2012) på at elever på 10. trinn har en manglende forståelse av likhetstegnet og av ekvivalens i manipulasjonen av likninger. Ekvivalens er et kjernebegrep i algebra, og å forstå dette begrepet er sentralt for å utvikle en algebraisk kompetanse (Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2007; Kieran, 2007; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). En dypere forståelse av ekvivalens kan for eksempel bidra til å gjøre «flytt og bytt»-manipulasjonen av likninger mer meningsfull for elever. Tidligere studier har vist at dette er en svært vanlig løsningsstrategi, men få elever viser en forståelse av hva som ligger bak «flytt og bytt»-prosedyren (Naalsund, 2012).

Bruk av konkreter[6] kan bidra til økt forståelse av fagstoffet, men det er svært viktig å ha et tydelig fokus på overføringsverdien fra bruken av konkretene til den læringen man ønsker at skal skje (se f.eks. Moyer, 2002). Klare mål og en bevissthet om hvilke kompetanser (jf. de fem kompetansene presentert i avsnitt 2.1) man ønsker å øve i arbeidet med konkreter, er essensielt, og i dette arbeidet må læremidlene brukes bevisst. For å illustrere dette poenget vil vi vise til en studie som fulgte elever over flere år. Forskere ved Rutgers University, New Jersey (Maher, 2005; Maher, Powell, Weber & Lee, 2006; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008) viste hvordan elever gjennom gruppearbeid (typisk grupper på fire) og diskusjoner bygget en stadig dypere forståelse for matematiske begreper og sammenhenger etter hvert som de gikk fra barneskole til ungdomsskole og videre til videregående utdanning. Et eksempel viser hvordan de på barneskolen bygget tårn av fysiske klosser (f.eks. fire klosser høye og to farger – hvor mange kombinasjoner er mulig?). Dette problemet ble tatt opp igjen i første klasse på videregående skole, hvor det da ga et grunnlag for utforsking av Pascals talltrekant, som ofte brukes til å finne binomialkoeffisienter gitt ved $C(n,r) = n!/(r!(n - r)!)$. Blant annet ved å bygge på erfaringene fra tidligere skoleår klarte elevene på egen hånd å beskrive og forklare Pascals identitet ($C(n,r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r)$). Læringsprogresjoner, såkalte *trajectories* i internasjonal litteratur, beskriver hvordan elever beveger seg fra tidligere kunnskap til mer sofistikert forståelse. Dette eksempelet illustrerer hvor viktig en bevisst bruk av konkreter er for å hjelpe elevene til å utvikle en dypere matematisk kompetanse (jf. første undervisningsprinsipp fra avsnitt 2.1: *Lage tydelige matematiske mål for å gjøre læreprosessen mer fokusert*). I de longitudinelle studiene trekker elevene selv fram denne praksisen som særlig lærerik. De hadde godt utbytte av måten de ble oppfordret til å utforske og oppdage sin egen notasjon, og hvordan forståelse ble bygget i et fellesskap der argumentasjoner, begrunnelser og forklaringer var det sentrale for å drive prosessen (jf. undervisningsprinsipp 4: *Legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs* og 5: *Stille målrettede spørsmål*, fra avsnitt 2.1).

En annen longitudinell studie som gir et tilsvarende rikt bilde av hvordan man gjennom en matematisk diskurs kan øve andre kompetanser (jf. de fem kompetansene presentert i avsnitt 2.1) enn prosedyrekunnskap, er presentert hos blant andre Carraher & Schliemann, 2007 og Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007. Særlig får vi gjennom denne studien et innblikk i

[6] Med «konkreter» så mener vi her først og fremst bruk av fysiske gjenstander (f.eks. en vekt, byggeklosser eller geometriske figurer). Det kan også være snakk om halvkonkreter (f.eks. bilder eller tegninger av helkonkretene).

hvordan man gjennom å stille gode, målrettede spørsmål til elevene kan drive helklassesamtaler på en slik måte at man legger til rette for en algebraisk forståelse allerede i de første klassetrinnene på barneskolen. Som i studien fra Rutgers University legger også disse forskerne vekt på at elevene selv skal «finne opp» sin egen notasjon i diskusjon og argumentasjon med medelever.[7] Dette gir et eierforhold til fagstoffet, noe forskerne igjen hevder er helt sentralt for en dypere forståelse og for engasjement for videre læring (se avsnitt 2.1). Det hjelper også elevene til å jobbe litt ekstra med vanskelige oppgaver som de ikke klarer å løse med det samme (jf. undervisningsprinsipp 7 om produktiv motstand).

Enkelte oversiktsstudier som ser på effekter ved bruk av læremidler, viser at elevene jevnt over får et positivt læringsutbytte ved bruk av digitale læremidler, sammenliknet med tradisjonell plenumsundervisning der læreren står ved kateteret og underviser basert på lærebok (Li & Ma, 2010; Lou, Abrami & d'Apollonia, 2001). Imidlertid er det ikke slik at man bare kan ta i bruk digitale læremidler i klasserommet og forvente forbedringer. Oversiktsstudiene viser at variasjoner i type sosial organisering, læremidler og arbeidsformer gir ulik tilgang til produktiv samhandling og ulik potensial for læring. Oppgavene elevene skal gjøre, er også av betydning. Hvis oppgaven i høy grad følger prosedyrer, som for eksempel ved algoritmisk oppgaveløsning i matematikk, så kan læringseffekten være liten eller til og med negativ, selv om elevene jobber i grupper (Diziol, Rummel, Spada & McLaren, 2007). Hvis de derimot får mulighet til å forklare hva de tenker, og oppgaven støtter en begrepsforståelse (jf. undervisningsprinsipp 2: *Integrere oppgaver som legger til rette for resonnering og problemløsing* og 4: *Legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs*), så ser man større potensial for læring (Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001).

Dolonen og Ludvigsen (2012) har sett nærmere på hvordan læreren i ulike situasjoner må forholde seg til elevenes resonnering knyttet til hva det digitale læremiddelet tilbyr. De har observert hvordan elever i videregående skole, i interaksjon med læreren og en digital læringsomgivelse for geometri, får tilgang til ulike læringsforløp som igjen gir tilgang til ulik forståelse av geometriske begreper. Læremiddelet som brukes, gir elevene mulighet til å manipulere 2- og 3-dimensjonale figurer samt å regne ut variabler for å finne overflate/volum-

[7] For eksempel så var det i denne studien 2.-klasseelevene selv som fant ut at en avhengig variabel kunne representeres ved N+3, etter at de i fellesskap hadde blitt enige om at den uavhengige variabelen kunne representeres ved N. Det er en avansert øvelse å gå fra å operere med gitte tall til å operere med variabler, og med en slik forståelse så har de lagt et viktig grunnlag for en dypere forståelse av funksjoner.

ratio. Det gjør at elevene kan veksle mellom konkret og abstrakt kunnskap. Ved å analysere pre- og posttester samt videoopptak viser studien hvordan elevenes forskjellige kapasitet i matematisk problemløsning skaper ulike betingelser for interaksjon med læremiddelet og med læreren. I møte med elevene må læreren vurdere deres kapasitet i relasjon til det læremiddelet tilbyr, og ut fra det velge den læringsstrategien som han tror fungerer. Studien viser hvordan en gruppe elever som har basisferdigheter for visse matematiske prosedyrer, forstår designelementer i læremiddelet og dermed har grunnlag for å inngå i en begrepsmessig diskusjon med læreren (jf. undervisningsprinsipp 4: *Legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs* og 6: *Bygge prosedyreferdigheter basert på begrepsforståelse*). Det står i kontrast til erfaringer med en annen gruppe elever som ikke har samme grunnleggende ferdigheter, og som dermed gjør problemløsning utfordrende. Det gjør at deres interaksjon med læreren og læremiddelet er preget av prøving og feiling.

White og Pea (2011) viser hvordan elever forbedrer sin matematiske kompetanse i interaksjon med læremidler. De fokuserer på ungdomsskoleelevers engasjement knyttet til en matematisk læringsomgivelse om kryptografi, fylt med ulike komponenter og representasjoner som tall, bokstaver, likninger, grafer og tabeller. Ved å analysere videoopptak, feltnotater og intervjuer av grupper av samarbeidende elever viser forfatterne hvordan interaksjonen elevene imellom endres over tid. De påviser også endring i elevenes bruk av slike representasjoner. Analysene viser at elevene tolker oppgavene de får, og sammenlikner dem med de representasjonene som er tilgjengelig i læremiddelet. Det viser at elevene ikke nødvendigvis bruker læringsomgivelsen som forutsatt av designerne, men at de over tid evner å gå ut over de ressursene forskerne gir dem (for eksempel ved å hente informasjon andre steder), og klarer å velge ut visse type ressurser (for eksempel et sett med tabeller) som de mener er avgjørende for å løse oppgavene de blir presentert for. Over tid endres måten elevene velger ut relevant informasjon på, og de kommuniserer med stadig økende matematisk presisjon, som gjør at de løser stadig mer komplekse oppgaver (jf. undervisningsprinsipp 2: *Integrere oppgaver som legger til rette for resonnering og problemløsing*, 4: *Legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs* og 7: *Gi elevene produktiv motstand og mulighet til å strekke seg i læreprosessen*).

Dynamiske, interaktive geometriprogrammer, som GeoGebra og Graph, kan brukes til for eksempel å studere multiple representasjoner (tabeller, grafer, symboluttrykk) på en dynamisk måte (jf. undervisningsprinsipp 3: *Bruke og se sammenhenger mellom ulike* *representasjoner*). Man kan på en raskere måte enn med penn og papir utforske hvordan grafen endrer seg i takt med at man eksempelvis endrer koeffisienter i funksjonsuttrykket eller punkter i tabellen. Dette kan gjøre det lettere å forstå sammenhengen mellom et funksjonsuttrykk og funksjonsgrafen, og dermed bidra til en dypere begrepsforståelse av funksjoner (NCTM, 2000; NCTM, 2014; Utdanningsdirektoratet, 2014). Eleven kan studere flere funksjonsuttrykk i løpet av kort tid og dermed skape et grunnlag for matematiske generaliseringer. Slike generaliseringer ligger på et høyere abstraksjonsnivå og krever at eleven har en dypere forståelse av matematisk struktur.

Oppsummert fra studiene som er referert ovenfor, kan undervisningen i matematikk i norske klasserom virke noe ensidig med tanke på å øve et bredt spekter av de matematiske kompetanser som ble presentert i avsnitt 2.1. Det kan se ut som om flere av de åtte undervisningsprinsippene (avsnitt 2.1) som er utarbeidet som et rammeverk for å styrke læring og undervisning i matematikk, ikke er en integrert praksis i matematikkundervisningen. Læreboka er fortsatt det mest brukte læremiddelet for matematikk i norske klasserom. Bruken av digitale læremidler øker, men det er fortsatt behov for mer kunnskap om hvordan de brukes. Forskning antyder at digitale læremidler kan ha en positiv effekt på elevers matematiske kompetanse. Samtidig er denne læringseffekten sterkt knyttet til typen sosial organisering (f.eks. små grupper), læremidler (f.eks. dynamiske geometriprogrammer) og arbeidsformer (f.eks. undersøkelsesbasert). Ikke minst er den knyttet til hvordan interaksjonen mellom elever, lærer og læremiddel foregår under veiledning.

3 Feltarbeid, data og metode

I dette kapitlet beskriver vi hvordan feltarbeidet (datainnsamlingen) ble gjort, hvilke typer data vi samlet inn, og hvilke strategier vi benyttet for å analysere dem.

3.1 Data og beskrivelse av feltarbeidet

Grunnlaget for resultatene i denne rapporten finnes i dataene fra feltarbeidet. Først gir vi en beskrivelse av konteksten for arbeidet med denne casen.

3.1.1 Beskrivelse av casen

Feltarbeidet ble gjennomført i løpet av 3 uker i september 2014 i 1T ved en videregående skole på Østlandet. I alt 21 elever og én lærer deltok i casestudien. Før studien startet, hadde to forskere deltatt på totalt fire planleggingsmøter: først ett møte med fagkoordinator ved skolen våren 2014 og deretter tre planleggingsmøter med faglæreren for klassen i casen rett etter skolestart sommeren 2014.

Læreren hadde mer enn 5 års erfaring som matematikklærer. Han hadde tidligere undervist i 1T, 1P, 2P, 1P-Y, 2P-Y, S1 og S2. I perioden vi var der, underviste han i 1T (Vg1) og 2P-Y (Vg3) samt naturfag. Temaet for undervisningen i denne casen er læreplanens kompetansemål knyttet til *tall og algebra* etter 1T – Vg1 studieforberedende utdanningsprogram. Læreren planla og sto for undervisningen, mens forskerne gjorde observasjoner, intervjuer og pre- og posttester. Elevene var organisert i par slik læreren var vant til å gjøre det. Undervisningen foregikk i to rom; begge hadde projektor og lerret, men bare ett av dem hadde interaktiv tavle. Tabell 1 viser en oversikt over aktivitetene i casen.

Tabell 1. Aktivitetsoversikt i casen matematikk 1T vgs. Hver av dagene inneholdt en klokketime.

Dag	Antall elever	Aktivitet
1		Avlyst pga. nasjonal kartleggingsprøve ved skolen.
2	11 gutter, 5 jenter	Pretest. Ingen undervisning.
3	11 gutter, 5 jenter	Læreren starter med å be elevene lese i læreboka. Elevene leser og løser deretter oppgaver i læreboka. Lærer skriver så oppgaver på tavla, som de løser sammen. Samtaler om begreper (kvadratsetning, ledd og faktorisering). Elevene veksler deretter med å løse oppgaver i læreboka og på tavla ved å skrive i kladdeboka. Læreren veksler mellom å hjelpe elevene og å løse oppgavene på tavla.
4	11 gutter, 4 jenter	Læreren starter med å informere elevene om at de skal løse oppgaver fra kapittel 2 for å forberede seg på kapitteltest i neste mattetime. Elevene sitter i par, men jobber deretter utpreget individuelt med å løse oppgaver i læreboka ved å skrive i kladdeboka. Læreren går rundt og veileder.
5	11 gutter, 4 jenter	Prøve i kapittel 2. Etter prøven skal elevene rette hverandre, men læreren skal ha en versjon (kun svarene) som han skal sjekke selv. Elevene jobber individuelt på prøven, og de får ikke bruke kalkulator, kun penn og papir. Oppgavene står på tavla. Etter en halvtime med prøve setter elevene seg i par og retter hverandre mens læreren går rundt og veileder parene. Etter 20 minutter vender lærer aktiviteten ved at lærer og elever i fellesskap gjennomgår svarene på prøven og hvordan elevene har evaluert hverandre i parene.
6	14 gutter, 4 jenter	Læreren introduserer kapittel 3. Deretter en halvtimes plenumssesjon der elevene skal balansere likninger. Elevene sitter i par, og jobber så i hovedsak individuelt med å løse likninger fra læreboka. Læreren går rundt og veileder. Til slutt gjennomgår læreren i plenum oppgavene på tavla.
7	11 gutter, 2 jenter	10 minutter med informasjon fra læreren om blant annet kartleggingsprøvene. Han informerer om at de elevene som nå mener de ikke holder 1T-nivået, bør gå over til 1P. Elevene tar fram personlige datamaskiner. Læreren informerer om Graph, og elevene tar det i bruk. Elevene jobber deretter, i Graph og med kladdebok, med oppgaver fra læreboka.
8		Avlyst.
9	10 gutter, 2 jenter	Læreren gir generell informasjon og informasjon om posttesten. Elevene laster ned GeoGebra og følger med når læreren viser eksempler på bruk. Elevene får velge om de vil bruke GeoGebra eller Graph. De sitter i par og løser oppgaver i lærebok og på tavle i hovedsak individuelt ved hjelp av disse verktøyene. Læreren veksler mellom å veilede og å vise løsninger på tavla ved hjelp av GeoGebra.
10	9 gutter, 2 jenter	Elevene sitter i par og bruker GeoGebra eller Graph mens de jobber med oppgaver i læreboka. Læreren går rundt og veileder. Etter hvert som elevene blir ferdig med en oppgave, viser læreren løsningen på tavla. Læreren veksler mellom å veilede og å vise oppgaveløsning på tavla. Elevene veksler mellom å jobbe individuelt og i par.
11	9 gutter, 2 jenter	Posttest. Ingen undervisning.
12	8 gutter, 2 jenter	Intervjuer av utvalgte elever og lærer.

Skolen der datainnsamlingen ble gjennomført, befinner seg på Østlandet. Den bar preg av slitasje, men deler var nyoppusset, mens andre deler var under oppussing. De to rommene der klassen hadde matematikk, var store og luftige, men enkelte dager når vi var der, var det svært varm og tung luft i klasserommet, og vinduene måtte åpnes. Da hendte det at vinden blåste inn gardinene i vinduene, eller at det var støy på utsiden av klasserommet, noe som kunne virke forstyrrende på elever og lærer. Skolen er multikulturell med tospråklige og minoritetsspråklige elever som majoritet. Dette gjenspeiles i skolens visjon, som er å gi elever med ulik bakgrunn de samme mulighetene. For å realisere visjonen har skolen en tydelig pedagogisk plattform med klare mål for opplæringen, og de har tiltak for god læring, blant annet leksehjelp og individuell oppfølging.

Skolens pedagogiske plattform ble også reflektert i planleggingsmøtene med fagkoordinatoren og læreren og i gjennomføringen av denne casen. Begge vektla at undervisningen skulle bidra til matematisk begreps- og dybdeforståelse gjennom å snakke matematikk og bruke ulike representasjoner av fagstoffet. Dette var basert på en erkjennelse av at elevene ved skolen hadde ulikt utgangspunkt og trengte ulike tilnærminger til fagstoffet. Derfor hadde man ved denne skolen brukt ressurser på å utarbeide omfattende kompendier i matematikk, for å supplere lærebøkene og lage noe som var mer tilpasset den varierte elevmassen ved skolen.

Det var et par utfordringer da vi planla casen. I møtet med fagkoordinator ytret forskerne to ønsker: Det første ønsket gjaldt å se på læremidler og arbeidsformer i temaet algebra, ettersom vi da ville få et faglig tema som var gjennomgående for alle de tre casene for de tre ulike skoletrinnene i *ARK&APP*-prosjektet. Datainnsamlingen ble derfor lagt til september, som var den tiden da dette temaet ble undervist. Det andre ønsket vi hadde, var at elevene skulle ha tilgang til datamaskiner i løpet av forløpet, for at vi da kunne se hvordan lærer og elever jobbet med digitale læremidler og ressurser. Alle elever i videregående skole skal ha tilgang til personlig datamaskin, men 1T-elevene ved denne skolen får utlevert datamaskin først et par uker ut i september. Ved det tidspunktet er 1T-elevene gjerne godt i gang med kapittel 2, om tallregning og algebra. For å sikre at vi også fikk observert bruk av digitale læremidler, ble kapittel 3, om formler, likninger og ulikheter, også inkludert. Dermed ble undervisningsopplegget lagt slik at vi observerte én del der elevene jobbet før de fikk utlevert bærbare maskiner, og så også etter at de hadde fått utlevert maskinene.

Selve casestudien var planlagt å gå over 3 uker à 4 enkelttimer (hver på 60 minutter, til sammen 12 timer). Som Tabell 1 viser falt imidlertid 2 timer ut på grunn av utenforliggende årsaker, noe som gjorde at læreren gikk gjennom det avtalte stoffet på kortere tid enn planlagt (7 skoletimer istedenfor 9). Tabell 1 viser også at elevtallet i de ulike timene varierte mellom 18 og 11. Ettersom det var indre variasjoner i hvem som dukket opp til timene, var til sammen 21 elever innom timene én eller flere ganger.

3.1.2 Beskrivelse av data

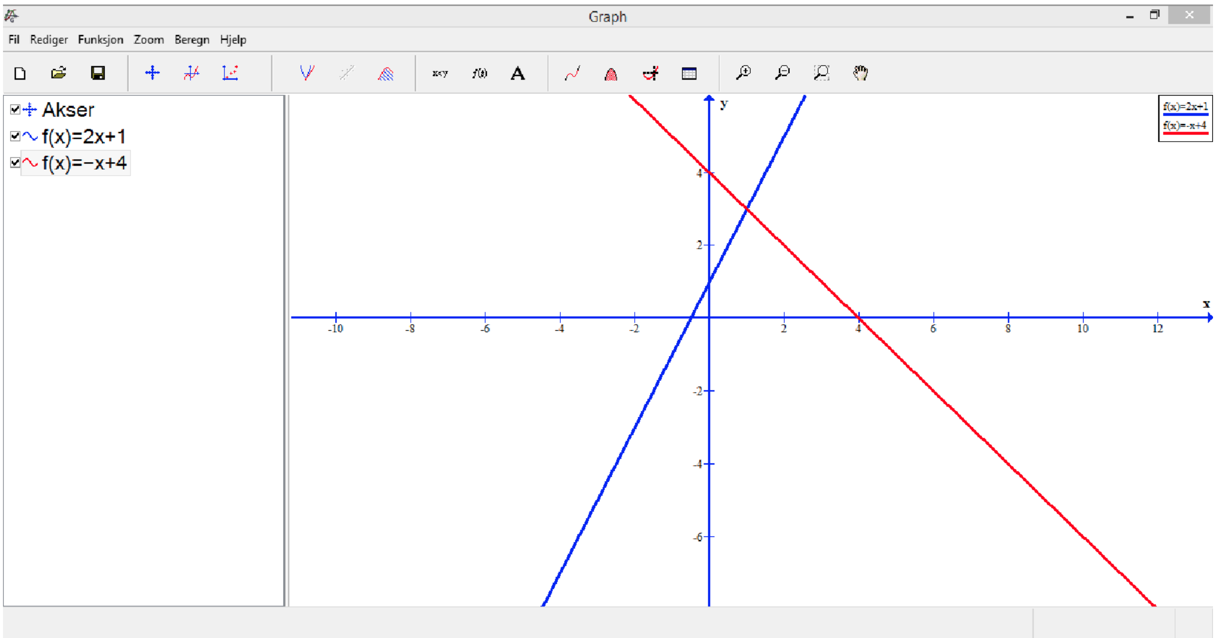
Data ble innhentet gjennom strukturerte observasjonsskjemaer og feltnotater fra hver skoletime (se vedlegg 1b). Det ble også gjort videoopptak av lærerens undervisning, av interaksjonen mellom elever og lærer, og mellom elever som arbeidet i par med læremidler. Kriteriene for utvalg av fokusgrupper var kjønn og at de satt slik at vi kunne filme uten at det forstyrret elevene nevneverdig. Vi valgte derfor de tre parene (2 par à 2 gutter og ett par med jenter) som satt bakerst i klasserommet. Det ble gjort pre- og posttester (se vedlegg 2), og lærer og elever ble også intervjuet etter at forløpet var gjennomført. I tillegg samlet vi inn planleggingsdokumenter, og vi tok bilder underveis. Tabell 2 oppsummerer de datatypene vi har benyttet oss av for analyser.

Tabell 2. Beskrivelse av de ulike datatypene i casen matematikk 1T, VGS

Datatyper	**Beskrivelser**
Dokumenter	Plandokumenter for studien, møtereferater og e-poster, lærebok
Pre- og posttester med resultater	15 kunnskapsrelaterte spørsmål knyttet til algebra utarbeidet av forsker i samarbeid med lærer, med elevenes resultater
Observasjonsskjema	Notater gjort i klasserommet av elev- og læreraktivitet knyttet til læremidler, arbeidsform og tidspunkt
Feltnotater	Utfyllende notater gjort i etterkant av hver skoletime
Videoopptak	20 timer opptak av helklasseaktiviteter, elever som arbeider i par samt intervju med lærer og elever
Intervju	Guide og notater fra intervjuene med lærer og elever
Bilder	Bilder tatt av læremidler som ble brukt av lærer og elever

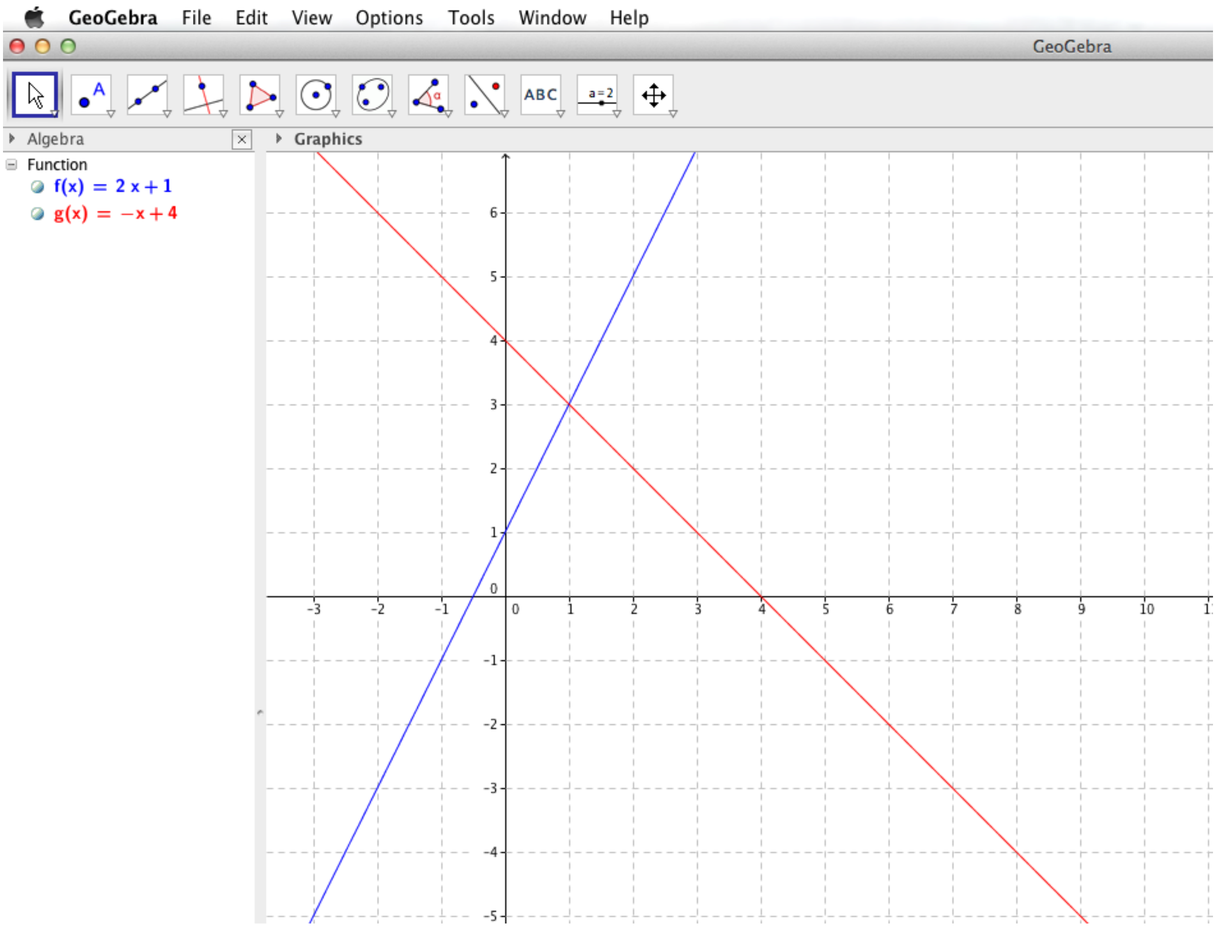
3.1.3 Beskrivelse av læremidler og læringsressurser

Læremidlene som i hovedsak ble brukt, er læreboka (*Sinus 1T*) samt enkelte digitale læremidler og digitale ressurser for grafisk framstilling av funksjoner og likninger (Graph og GeoGebra). Læreboka *Sinus 1T* (Oldervoll et al., 2009) består av en teoridel og en oppgavedel. Kapitlene i boka er organisert slik at kompetansemålene som kapitlet omhandler, blir presentert først. Deretter får man introduksjonstekst til et tema, gjerne med et eksempel, og med nyttige tips for løsninger. Det enkle fagstoffet blir presentert først og det vanskelige til slutt. Oppgavestoffet er plassert inne i delkapitlene samt i et eget oppgavehefte. Til slutt i hvert kapittel i læreboka er det et sammendrag av viktige regler og metoder i kapitlet samt fasit. I oppgaveheftet som følger læreboka, er oppgavene til hvert kapittel fordelt på tre nivåer: lettere oppgaver (rød del), vanskelige oppgaver (blå del) og blandede oppgaver (brun del). I tillegg fins det et nettsted tilknyttet boka, men det ble ikke benyttet i undervisningen.[8]



Figur 2. Skjermbilde fra programmet Graph. To funksjoner er skrevet inn og vises grafisk.

[8] http://sinus1t.cappelendamm.no/



Figur 3. Skjermbilde fra programmet GeoGebra. To funksjoner er skrevet inn og vises grafisk.

I tillegg til læreboka ble det brukt digitale verktøy for grafisk framstilling av funksjoner og likninger: Graph og GeoGebra. Graph[9] (Figur 2) er et gratis program (åpen kildekode) som brukes til å tegne matematiske grafer av funksjoner i et koordinatsystem. Det gjør det lett å gjøre utregninger og å visualisere en funksjon. Ifølge læreren var dette et egnet program for å introdusere grafisk framstilling av funksjoner til elevene i 1T, ettersom terskelen for å ta Graph i bruk var lav.

GeoGebra [10] (Figur 3) er et velkjent digitalt læremiddel i norsk skole, spesielt i den videregående skolen. Det kan brukes til geometri, algebra og statistiske analyser. Det har større funksjonalitet og kompleksitet enn Graph, og har noe høyere brukerterskel. Programmet er basert på åpen kildekode, det er gratis og er anbefalt på flere av Utdanningsdirektoratets nettsider som et støtteverktøy for matematikkelever både på ungdomsskolen og i videregående skole. GeoGebra er interaktiv geometri-programvare. En kan lage

[9] http://www.padowan.dk/
[10] http://wiki.geogebra.org/nb/Hovedside

konstruksjoner med punkter, vektorer, segmenter, linjer og kjeglesnitt, i tillegg til regulære funksjoner, og de kan modifiseres. Programmet kan dessuten benyttes til likninger, og koordinater kan legges inn direkte. På den måten har GeoGebra muligheten til å håndtere variabler for tall, vektorer og punkter og finne derivasjoner og integraler av funksjoner (GeoGebra team, 2013).

Læreren fortalte under planlegginga at GeoGebra var et læremiddel alle elever ved skolen brukte jevnlig i matematikk i 2. og 3. klasse, og som regel begynte lærerne å introdusere dette læremiddelet underveis i 1. klasse. Imidlertid mente lærerne ved skolen at GeoGebra var såpass rikt på funksjonalitet at det interaktive grensesnittet kunne være vanskelig å forstå for elevene på dette nivået. Derfor foretrakk denne læreren å introdusere grafisk framstilling av funksjoner først ved hjelp av Graph, og deretter gradvis å gå over til å bruke GeoGebra når elevene hadde forståelsen for det faglige temaet. På den måten ville ikke overgangen til bruk av GeoGebra bli for stor. Samtidig la han vekt på at de elevene som hadde erfaring med GeoGebra fra ungdomstrinnet, naturligvis fikk lov til å bruke GeoGebra med en gang.

3.2 Analyser av data

Vi har benyttet oss av flere metoder i denne casestudien (Yin, 2013). Resultatene fra pre- og posttester og tid brukt på ulike typer aktiviteter og på læremidler er kvantitative data, mens de andre datatypene representerer ulike former for kvalitative data. Alle data er relevante, men ikke alle har samme status i analysen. Vi benytter oss av det Creswell (2009) kaller parallell integrert strategi (eng: *concurrent embedded strategy*) der flere datatyper kan behandles i én studie og analyseres hver for seg, men kan sees i sammenheng for å forklare fenomenene når forskningsspørsmålene skal besvares. I denne casen er de kvalitative dataene, som videoopptak, feltnotater og intervjuer, i forgrunnen. De gir oss en forståelse av interaksjonen mellom elever og lærer mens de arbeider med de ulike læremidlene. De kvantitative dataene er i bakgrunnen og forteller oss hvilke undervisningsformer og læremidler som ble benyttet, de gir oss også en indikasjon på elevenes prestasjonsnivå i algebra før og etter undervisningsforløpet.

Observasjonsskjemaene summerer opp hvor mye tid lærer og elever brukte på ulike aktivitetstyper (se Figur 4). Analysene av disse gir oss innblikk i hvordan læreren organiserte elevene, og vi har også summert hvilke læremidler som ble mest benyttet. I tillegg har vi utviklet en matrise der vi har sett hvilke læremidler som ble benyttet til spesifikke aktivitetstyper. Det gir innblikk i hvilke arbeidsformer og læremidler som er mest typisk for denne casen. Disse analysene har blitt supplert med analyser av feltnotater, som gir et mer utfyllende bilde av hva som skjedde i klasserommet.

Analyser av videoopptak gir oss mulighet til å forstå hvordan elever og lærere på et mikronivå forholder seg til hverandre og til de læremidlene som er i spill i klasserommet. Valg av hvilke episoder fra videoopptakene som skal analyseres, er basert på hva de kvantitative resultatene forteller oss med hensyn til variasjon i bruk av læremidler og arbeidsformer, endring i prestasjon fra pretest til posttest, og opplysninger som ble gitt under intervjuene. Selve analysene av videoopptakene er basert på en dialogisk orientert tilnærming (Linell, 1998; 2009). I denne analysetilnærmingen benytter vi en 2-stegs prosess. Først gjennomgås videoopptakene flere ganger for å undersøke hva aktørene i videoen gjør og snakker om, og hvordan de orienterer seg i forhold til hverandre og til læremidler og institusjonelle aspekter i situasjonen. I neste steg knyttes aktørenes dialog og orienteringer til det som er av forskningsmessig interesse, hvilket i denne rapporten gis av de tre forskningsspørsmålene.

Pre- og posttestene (se vedlegg 2 a og b) ble laget i samarbeid med læreren. Spørsmålene i testene var basert på oppgaver som man finner i læreboka, og algebratester i TIMSS, slik de er beskrevet i Naalsund (2012). De var lagt opp slik at det skulle være mulig å identifisere variasjon i læringsutbytte for elevene, knyttet til ulike tema. Våre testspørsmål har dermed både relevans for skolens praksis og for våre forskningsspørsmål i denne casen. Elevene fikk 1 time på å besvare oppgavene i gjennomføringen av både pretest og posttest. De besvarte 15 oppgaver; 8 oppgaver var knyttet til kapittel 2 og 7 oppgaver knyttet til kapittel 3. Maksimal score var 22 poeng. Oppgavene ble syntaktisk endret fra pretest til posttest, slik at elevene ikke kunne memorere oppgaver og svar, men de var samtidig så like at de målte samme kunnskap. For å sikre oss samsvarende utregning av resultatene på pretestene og posttestene benyttet vi oss av *interrater* reliabilitetsmåling, det vil si at to personer bedømmer testene uavhengig av hverandre. Her ble dette gjort ved at en forsker og læreren upåvirket av hverandre ga poeng på pre- og posttestene. I denne casen var forskeren og læreren 90,9 % parvis enige i bedømmingen av svarene på testspørsmålene (kappa > 0,85). Det betyr at testresultatene har høy pålitelighet.

For å analysere pre- og posttestene har vi benyttet oss av paret t-test, som brukes for å analysere forskjeller i resultat produsert av den samme gruppen av elever på to forskjellige tidspunkt (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Imidlertid gir t-tester oss bare indikasjon på om forskjellen mellom de to gruppene er signifikant. For å få vite noe om effektstørrelsen relatert til forskjellen benyttet vi oss av Cohen's d (Cohen, 1992), som indikerer størrelsen på variasjonen fra pretest til posttest.

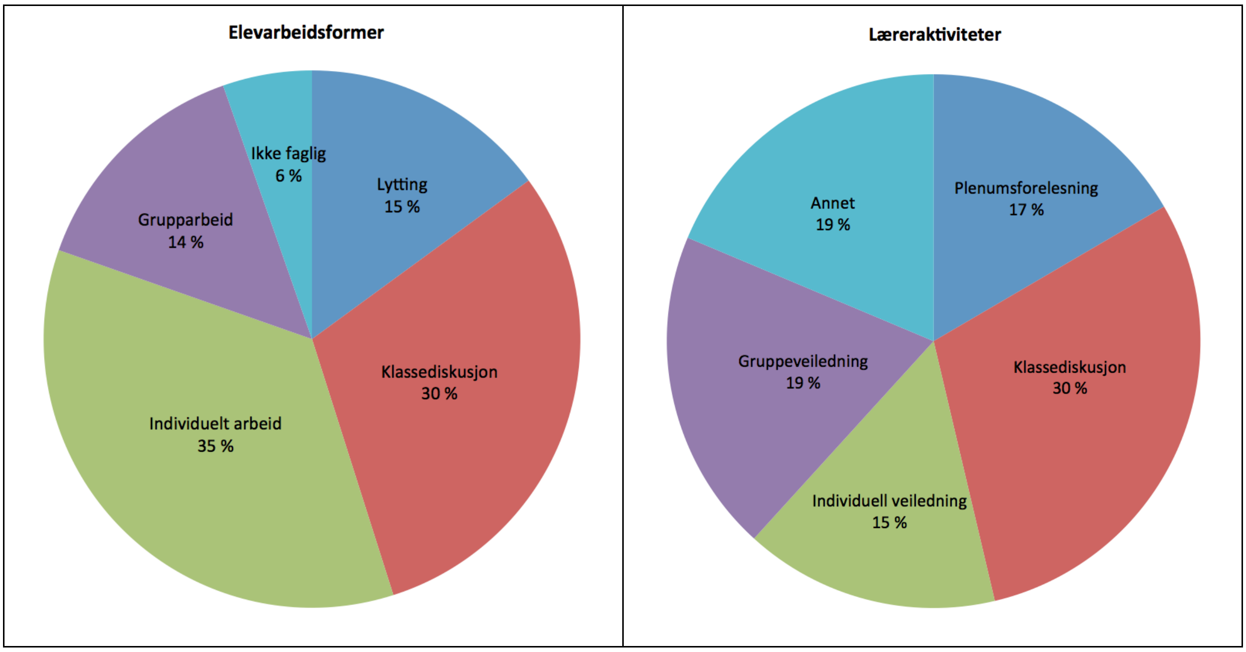
4 Resultater

I denne delen presenterer vi funnene basert på analyser av de ulike dataene. I avsnitt 4.1 viser vi hvordan læreren organiserte elevene, og hvilke læremidler som ble mest benyttet. I avsnitt 4.2 framlegger vi funn knyttet til læremidler og arbeidsformers funksjon i klasserommet. Disse er basert på kvalitative analyser av intervjuer av lærer og elever samt av interaksjoner mellom lærer og elever og elevene imellom i ulike deler av forløpet. I avsnitt 4.3 tar vi for oss elevenes engasjement og læring.

4.1 Arbeidsformer og læremidler

I dette avsnittet skal vi presentere og analysere resultatene fra observasjonene. Detaljerte feltnotater ble gjort under hver undervisningstime. Elev- og læreraktiviteter ble analysert ut fra følgende forhåndsbestemte kategorier: elevarbeidsformer og læringsressurser brukt av elevene; lærerarbeidsformer og ressurser brukt av læreren. Dette gir grunnlaget for å diskutere forskningsspørsmål om hvordan læremidler ble benyttet i undervisningen. Alle former for aktivitet og ressursbruk i klasserommet ble tidsregistrert (se vedlegg 1b). Observasjonene og registreringen er på minuttnivå og gir oss et kvantitativt mål på hvordan elever og lærer arbeidet i løpet av de 7 skoletimene (420 minutter) selve undervisningen foregikk.

Basert på tidsbruk viser kakediagrammet til venstre i Figur 4 elevenes samlede arbeidsformer i studien (n = 428 minutter), mens kakediagrammet til høyre viser lærerens samlede aktiviteter i studien (n = 431 minutter).



Figur 4. Elevarbeidsformer i kakediagrammet til venstre og lærerens aktiviteter til høyre.

I kakediagrammet til venstre i Figur 4 (elevenes arbeidsformer) viser kategorien «Individuelt arbeid» (35 %) til at elevene i hovedsak løste oppgaver i boka eller fra tavla alene. Kategorien «Gruppearbeid» (14 %) viser til når elevene jobbet aktivt i par. Elevene var i utgangspunktet organisert i par. De søkte ofte bekreftelse fra partneren angående svar på oppgaver, men det var ikke ofte de samarbeidet om å komme fram til svar. Kategorien «Ikke faglig» (6 %) var når læreren ga elevene generell informasjon som ikke var direkte faglig. Kategorien «Lytting» (15 %) tilsvarer læreraktiviteten plenumsforelesning og viser til når elevene satt og hørte på læreren som sto ved tavla og forklarte matematiske begreper og løsningsmetoder. Kategorien «Klassediskusjon» (30 %) viser til når det var aktiv dialog mellom læreren og elevene, som omhandlet faglige temaer.

Kakediagrammet til høyre viser at «Klassediskusjoner» også utgjorde 30 % av lærerens aktiviteter i klasserommet. «Plenumsforelesning» utgjorde 17 % av alle læreraktiviteter i denne casen. Med denne kategorien mener vi tiden læreren sto foran klassen og ga faglige forklaringer mens elevene lyttet. Denne aktiviteten var i høy grad monologisk, siden det kun var læreren som snakket. «Gruppeveiledning» (19 %) utgjør mer tid enn «individuell veiledning» (15 %), noe som kan virke paradoksalt ettersom individuelt arbeid utgjorde hovedaktiviteten til elevene. Grunnen til at tiden brukt til gruppeveiledning er høyere enn tiden brukt på individuell veiledning, er at læreren når han kom til pulten til et par, ofte veiledet begge elevene selv om de i hovedsak jobbet alene. I tillegg hadde elevene underveis en kapittelprøve der de senere skulle evaluere hverandre. Da gikk læreren også rundt og veiledet parene. Det siste aspektet forklarer også den høye «Annet»-kategorien (19 %), som skyldes at læreren gjorde andre ting mens elevene jobbet med kapittelprøven.

Vi har også krysskoblet hvilke læremidler og ressurser som ble brukt i elevenes ulike arbeidsformer. Som kakediagrammet til venstre i Figur 4 viser, jobbet elevene mest individuelt og da i hovedsak med læreboka, oppgaveheftet og kladdeboka (se vedlegg 2c for detaljert oversikt), men også med Graph eller GeoGebra. Vi observerte også bruk av kalkulator, men noterte ikke dette systematisk i observasjonsskjemaet, da bruken av kalkulator varierte blant elevene. Klassediskusjon er den nest hyppigst brukte arbeidsformen, og det som da ble diskutert, var i hovedsak det som sto på tavla.

Når vi krysskobler lærerens bruk av læremidler og ressurser i de ulike arbeidsformene, så ser vi at han i høy grad brukte tavla og i litt mindre grad læreboka når han foreleste eller under klassediskusjoner. Når han gikk rundt og veiledet, var han som oftest orientert mot læreboka, oppgaveheftet og mot kladdeboka til elevene, men også mot Graph eller GeoGebra når elevene brukte disse verktøyene (se vedlegg 2d for detaljer). Læreren startet ofte det faglige med å presentere et tema, enten muntlig eller på tavla, før elevene jobbet individuelt eller i par. Underveis skjedde det flere ganger at læreren påkalte alles oppmerksomhet for å få anledning til å diskutere aspekter ved oppgavene med elevene. Deretter jobbet elevene videre, og ved slutten av timen var det gjerne avsluttende diskusjoner knyttet til temaet.

4.2 Bruk av læremidler og ressurser i klasserommet

Det andre forskningsspørsmålet omhandler hvilken funksjon bruken av læremidler og ressurser hadde i interaksjonen mellom lærer og elever. Både fagkoordinator og faglærer la vekt på at undervisningen skulle bidra til matematisk begreps- og dybdeforståelse gjennom å snakke matematikk og ved ulike måter å representere fagstoffet på. Som faglæreren sa i intervjuet etter undervisningsforløpet:

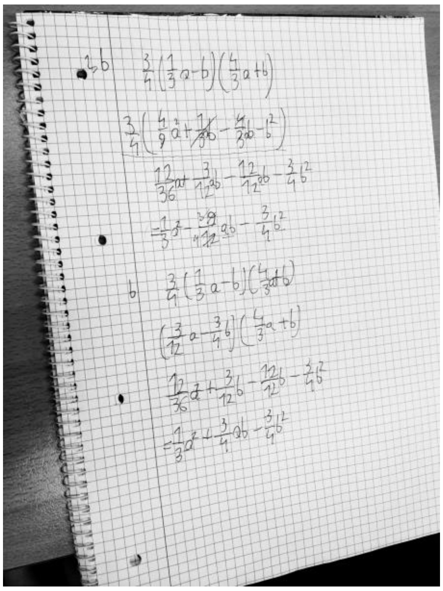
> [...] Hvis jeg har prøvd å beskrive eller forklare et eller annet konsept og jeg ser at dette ikke er noe de plukker opp logikken i eller klarer å feste seg ved, så er det gjerne å forsøke en helt annen innfallsvinkel eller et helt annet eksempel for å beskrive det konseptet. Og så kan det kanskje være å gå over til noe mer visuell beskrivelse av det. Eller kanskje spille på noen andre elever som kanskje har en tredje måte, for noen har kanskje plukket det opp og føler at de har fått grepet på hva dette handler om. Kanskje spille litt på de. Få de til å forklare på sin måte hvordan de gjorde det. Og så er det noe som jeg bruker veldig mye, og det er å jobbe med bevisstgjøring i forhold til egen måte å tenke på. Så jeg utfordrer de ofte på å beskrive hvordan de tenker.

Utsagnet til læreren legger nettopp vekt på det å prøve ulike innfallsvinkler eller representasjoner når han ser at elevene ikke tar i bruk begrepene han prøver å formidle. Læreren legger vekt på forskjellige ressurser som kan være til hjelp i læringssituasjonen: et alternativt eksempel, en annen metode, visualisering av begrepet eller å spille på andre elevers forståelse. Han legger også vekt på at elevene må være eksplisitte og sette ord på hvordan de tenker matematisk, noe som kan være til hjelp hvis elevens metode for problemløsning ikke passer eller ikke løser problemet.

Vi skal nå granske nærmere noen episoder der læreren prøver å skape vilkår for matematisk forståelse hos elevene ved å bruke ulike arbeidsformer i samspill med læremidler, læringsressurser og representasjoner. Utdragene fra disse episodene er basert på de mest typiske arbeidsformene fra avsnitt 4.1., og de inneholder både typiske og atypiske aspekter ved interaksjonene vi observerte i klasserommet.

4.2.1 Bruk av læremidler i veiledningssituasjon

Det første utdraget handler om hvordan læreren har lagt til rette for at elevene skal prøve ut forskjellige måter å tenke matematisk på, og det inneholder både typiske og atypiske aspekter ved situasjonene der læreren gikk rundt og veiledet elevene. Utdraget er hentet fra dag 4, og det er før elevene har fått utlevert hver sin personlige bærbare datamaskin. Læreren mener elevene har fått for lite egenregning til nå, og har gitt elevene i oppdrag å jobbe med de litt vanskeligere oppgavene (blå del) som er knyttet til multiplikasjon med faktorer og parenteser. Han har sagt at de gjerne må prøve ut ulike løsningsmetoder for å se om det kan finnes ulike måter å løse matteoppgaver på, for eksempel ved å multiplisere faktor utenfor parentes med første parentesuttrykk og deretter regne ut hele uttrykket, eller å løse opp parentesene først og deretter multiplisere inn faktoren utenfor parentes. Han går rundt og veileder. Elevene Kris og Leo sitter i par, og de bruker lærebok, oppgavedel og kladdebok. De har stoppet opp ved en oppgave. Leo har holdt hånda oppe for å signalisere at de trenger hjelp.



Figur 5. Kris og Leos utregning av én matteoppgave med to ulike metoder som gir samme svar.

Utdrag 1[11]

1.	Lærer:	Hvordan går det her?
2.	Kris:	Vi lurer på noe og sitter fast.
3.	Lærer:	Dere sitter fast?
4.	Kris:	Ja, med oppgave 2.232b.
5.	Lærer:	Det var den vi hadde i går? Var det ikke det, da?
6.	Kris:	Jo, det er riktig. Vi prøvde på begge forskjellige måter, men fant ikke svaret.
7.	Lærer:	Nei. Hvilken måte ser det ut til at dere kommer lengst med?
8.	Kris:	Altså, vi fikk det samme svaret på begge.
9.	Lærer:	Ja? Og ... og det er feil? Eller dere kommer ikke i mål, liksom?
10.	Leo:	Det er feil.
11.	Lærer:	Ok. *(Elevene snur læreboka og kladdeboka mot læreren.)* Hvor langt er dere kommet, da? Få se hvor langt dere er kommet. *(Kris viser kladdeboka med begge utregningene til læreren,* ***se Figur 5****)*.
12.	Kris:	Her er den første metoden *(peker på utregninga øverst i kladdeboka)*.
13.	Lærer:	Så der har dere tatt de to sammen først? *(Peker på utregninga øverst i kladdeboka der elevene har regnet ut parentesene først før de ganger inn faktoren utenfor parentes.)*
14.	Kris/Leo:	Ja.
15.	Lærer:	Ja. Og her har dere gjort den andre måten? *(Peker på utregninga nederst i kladdeboka der elevene har multiplisert inn faktor utenfor parentes med første faktor med parentes.)*
16.	Kris:	Ja.
17.	Lærer:	Ja.
18.		*(Læreren og elevparet gjennomgår sammen i løpet av 5 minutter utregninga øverst i kladdeboka. Elevene har hatt litt problemer underveis, blant annet med sammentrekninger av*

[11] Transkripsjonsnotasjoner:

[…]	Indikerer at ytringer er tatt ut av den opprinnelige dialogen
(#.0)	Nummeret i parentesen indikerer tid i sekunder på en pause i ytringen
(.)	Kort pause i talen
...	Indikerer at talerens ytring er ufullstendig
↑	Stigende intonasjon
↓	Synkende intonasjon
(*kursiv*)	Ikke-verbal aktivitet

ledd og størrelser på brøker i uttrykket, men utregninga er riktig. Læreren blir overrasket over at svaret på øverste utregning ifølge fasiten er feil. Så sjekker de sammen at oppgaven i boka er korrekt skrevet opp. Det er den. Deretter sjekker de den andre løsninga, som har samme svar.)

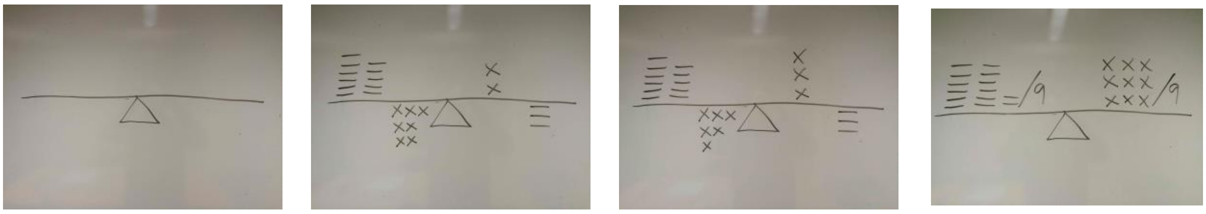
19. Lærer: Det ser, ja ... Jeg vil si det ser riktig ut, det her *(peker med pennen på øverste utregning)*. Så det kan godt hende at det er en feil i fasiten. (3.0) Jeg kan og... (3.0) prøve på PC'en og se hva den sier. Men, men gå videre, og så skal jeg sjekke. *(Lærer går bort til PC'en sin ved tavla og sjekker med GeoGebra. Han er borte i ca. 2 minutter før han kommer tilbake og bekrefter til elevene at fasiten er feil.)*

I utdraget over starter vi med det som var typisk for hvordan læreren veiledet de ulike elevparene. Først observerer vi hvordan læreren kommer bort til elevene etter at de har rukket opp hånda for å signalisere at de trenger hjelp. Han tar seg god tid til å stille flere spørsmål for å ramme inn hva det er de har problemer med. Etter hvert kommer det fram at elevene, ved å prøve ut to metoder for oppgaven, har fulgt lærerens råd om å prøve ut ulike løsningsmetoder. De får samme svar ved hjelp av begge metodene, men ifølge fasiten er svarene gale. Læreren må da ta seg tid til å gjennomgå hva de har gjort, for å finne feilene. På grunn av tiden dette tok, viser ikke utdraget dette direkte, men steg for steg gjennomgår de sammen løsningsforslagene til elevene i kladdeboka. Denne prosessen var i høy grad en lærerstyrt dialog. Elevene forklarte hvordan de tenkte hvis det oppsto uklarheter. Fram til dette punktet er episoden en typisk veiledningssituasjon, men så avviker episoden. Sammen kom elevene og læreren fram til at svaret med øverste metode i Figur 5 virket korrekt, men at svaret ifølge fasiten var galt. Deretter tar læreren i bruk oppgaveheftet for å sjekke at elevene har satt opp stykket på riktig måte, noe de har gjort. Dermed blir både lærer og elevparet usikre ettersom fasiten forteller at de tar feil. Som en siste sjekk mobiliserer læreren GeoGebra, som han har på PC-en sin, og når også den bekrefter elevenes svar, er læreren og elevene sikre.

Utdraget er et eksempel på hvordan læreren først avgrenser hva elevene har problemer med, og deretter tar i bruk ulike læremidler i dialog med elevene for å klargjøre hvordan og hvorfor de ikke får riktig svar på oppgaven. Etter hvert som utdraget tar en atypisk vending, viser det at fasiten i læreboka og oppgaveboka er en form for institusjonell autoritet. Fasiten forteller om svaret på utregninga er korrekt eller feil. Når elevene får problemer, påkaller de læreren som også er en institusjonell autoritet. Elevene velger altså å påkalle læreren til tross for at begge elevene har brukt to metoder og kommet fram til samme svar. De er for usikre til å gå videre. For læreren er også fasiten en institusjonell autoritet, og han tar seg god tid til å pakke ut elevenes problemløsning, før han utfordrer fasiten. Først når han har kryssjekket elevenes svar nøye, utfordrer han fasiten ved hjelp av GeoGebra, og da blir han sikker på at fasiten tar feil.

4.2.2 Bruk av alternativ representasjon i plenum

Den andre episoden vi skal se på, viser hvordan læreren i en plenumssituasjon prøvde å skape matematisk forståelse ved å problematisere et begrep illustrert ved hjelp av en alternativ representasjon. Han rammet inn situasjonen ved å si at når elever jobber med likninger, så tror mange at det bare handler om å finne x og bruke «flytt og bytt»-metoden (jf. punkt 2.3), en metode alle elevene i denne klassen hadde hørt om. Læreren sa imidlertid at begrepet «flytt og bytt» og prosedyren bak denne ikke var helt nøyaktig, fordi likninger egentlig handler om å balansere et matematisk uttrykk. Læreren rammet først inn poenget med å skrive «likning → balanse» på tavla. Deretter brukte han hendene for å visualisere balanseringen mens han snakket. Så, for å utdype poenget, bestemte han seg for å prøve en annen type visualisering ved å tegne på tavla. Sammen med elevene fant han en likning fra kapittel 3 i læreboka, som han skrev på tavla: **-7x + 11 = 2x - 3.** Mens han skriver opp eksempelet, sier han at han forsøkte det samme med elever på påbygg.



a) b) c) d)

Figur 6. Stegvis utvikling av vekta som representasjon for likninga -7x + 11 = 2x - 3

Utdrag 2a

1. Lærer: [...] De *(elevene som går påbygg)* har blitt ganske gode til å løse denne type likninger *(peker på likninga)* fordi vi har sett spesielt på dette her balansepoenget, da. Uhm (3.0).
2. Lærer: Og da tenkte jeg at jeg kunne vise dere også, bare for at vi har den forståelsen. Vi kan tenke oss at dette her er en vekt *(tegner en vekt på tavla;* ***se Figur 6a****)*. En balansevekt *(ser på elevene)*. Og så på den ene siden ... Og nå er denne her *(peker på likninga)* litt sånn komplisert fordi det er noe på en måte vi ikke har *(peker på -7 på venstre side i likninga)*... Eller vi er faktisk i minus på noe her, og vi er i minus på noe her *(peker på -3 på høyre side av likninga)*, og det var sånn som kom litt etter hvert når jeg holdt på med de folka *(påbyggelevene)* der borte.
3. Lærer: Men de fant ut at hvis «ja, vent da ... vi legger ting opp på vekta. Vi kan legge liksom 11 streker» *(teller høyt antall streker fra 1 til 11 mens han tegner dem oppå vektstanga på venstre side av vekta)*. Og på denne siden så har vi 2 x-er *(tegner 2 x-er oppå vektstanga på høyre side)*. Og så når vi begynte å se på sånne negative ting, så var det noen i den klassen som sa det at «ja vent da, vi kan skrive under». Ok, da viser det at vi faktisk er i minus, da, så på denne siden så kan vi skrive *(teller høyt mens han skriver 7 x-er under vektstanga på venstre side)* 7 x-er under vekta. Og på denne siden kan vi skrive tre streker *(tegner 3 streker under vektstanga på høyre side)* under vekta *(ser på elevene)*.
4. Lærer: Er dere med på at denne tegningen her nå *(peker på tegningen av vekta på tavla;* ***se Figur 6b****)* representerer akkurat det samme som vi har skrevet *(peker på likninga)* med, uhm, et matematisk uttrykk her? Ser dere sammenhengen?
5. Elev 1: Ja ... *(usikker i stemmen)*
6. Lærer: Gir det mening? *(Ser på elevene, men ingen av dem sier noe.)*

I utdraget over rammer læreren inn balansepoenget med en erfaring fra påbygg, der han syntes eksempelet fungerte. Vi kan derfor forstå episoden som lærerens forsøk på å se om et liknende eksempel skaper mening og diskusjon blant 1T-elevene. Utdraget viser imidlertid at det er krevende å ta i bruk alternative representasjoner. I denne episoden er det lite diskusjon, men høy grad av monolog: Læreren forteller og tegner, men elevene tar ikke aktivt del i meningsskapingen. Dette er merkbart, og derfor må læreren mot slutten forsikre seg om at det gir mening for dem. Elevenes nøling tyder på at de på dette tidspunktet ikke helt ser at visualiseringa med balansevekta fungerer som et konkret på den mer abstrakte likninga.

Rett etter utdrag 2a fortsetter læreren med å vise hvordan balansen opprettholdes ved å legge til på begge sider av vekta.

Utdrag 2b

1.	Lærer:	Nå er det sånn at vi har ... vi har noen minus her, da *(peker på x-ene under vektstanga på venstre side)*. Minus 7 x-er, så for å oppnå at vi ikke har noen x-er der, så kan vi legge til. Er dere med på det?
2.	Elev 2:	Ok *(lav stemme).*
3.	Lærer:	Så hvis jeg nå legger til en x her, så gjør jeg det ved å stryke den *(fjerner en x under vektstanga på venstre side og ser på elevene)* (2.0). Skjønte dere det? Ga det mening? *(Ser på elevene, men får ikke svar.)* Men da er den i ubalanse *(holder hånda slik at den peker nedover mot venstre)*. Så jeg må også legge til her for å opprettholde den balansen *(tegner inn en x oppå vektstanga på høyre side)*. Ok? *(Ser på elevene.)* Er det logikk? Dere må si ifra hvis dere faller av, uhm ... logikken her nå. Du rynker litt på pannen ... ok?
4.	Elev 3:	Ja, uhm ...
5.	Lærer:	*(Henvendt til elev 3)* Du er ikke helt med på sammenhengen mellom *(peker på vekta og deretter på likninga)*?
6.	Elev 3:	Hvordan forstår du det? (2.0)
7.	Lærer:	Disse som står under streken *(holder hånda under venstre side av vektstanga) ...*
8.	Elev 3:	Ja, det er minus.
9.	Lærer:	De representerer jo minus, og hvis jeg legger til en - ja, da blir det en mindre i minus *(ser på elev 3).*
10.	Elev 3:	Ja ... *(usikker)*
11.	Lærer:	Er du med? Så det blir ... *(fjerner en x under vektstanga på venstre side).* Ved å legge til en x så blir det en mindre i minus *(ser på elev 3 og peker under vektstanga på venstre side der en av x-ene er fjernet).* Da må jeg legge til en her også *(legger til en x oppå vektstanga på høyre side;* ***se Figur 6c****)* for å opprettholde balansen *(viser balanse med begge hendene).*
12.	Elev 3:	Mmm ...

Utdrag 2b viser flere problematiske aspekter ved å ta i bruk alternative representasjoner. For det første er det en blanding av verbal og ikke-verbal språkbruk. Når læreren lager referanser, bruker han ord som «her», «den», «disse» og «det», og det er ikke alltid klart hva disse ytringene refererer til. For å kompensere for dette upresise språket observerer vi mye bruk av deiktisk referering (peking på høyre og venstre side, over og under vektstanga) og gester (bruk av en eller begge hender for å illustrere vekt i balanse/ubalanse). Denne blandingen av verbal og ikke-verbal språkbruk viser at det er en kompleks prosess å bruke alternative representasjoner.

For det andre virker dette utdraget mindre monologisk enn utdrag 2a, men den sosiale interaksjonen er fremdeles svært lærerstyrt. Elevene virker fortsatt usikre og deltar ikke aktivt i diskusjonen. Prosedyren med å fjerne en x under vektstanga på høyre side fordi man legger til (linje 1, 3 og 11), kan virke forvirrende, og da må læreren prøve å mobilisere hva det er elevene ikke forstår.

For det tredje kan det virke som at logikken i representasjonen i løpet av utdraget delvis bryter sammen. Det å fjerne en minus ved å legge til er i og for seg riktig, men i en representasjon der læreren bruker en balansevekt for å løse en likning, er dette poenget ekstra komplisert ettersom man i praksis sjelden legger til ved å fjerne noe på en balansevekt.

Etter å ha overført alle x-ene som sto under vektstanga på venstre side, til oppå stanga på høyre side, og overført alle strekene som sto under stanga på høyre side, til oppå stanga på venstre side, skal læreren nå avslutte visualiseringa med å finne hvor mye én x veier.

Utdrag 2c

1.	Lærer:	Vi har 9 x-er som veier like mye som 14 sånne streker. Nå er det kanskje litt utaktisk valg *(peker på vekta)* av tall her, men hvis jeg sier at vi skal *(peker på x-ene på høyre side av vekta)* finne ut hvor mye én sånn x veier. Hva kan vi gjøre da? *(Peker på elev 4.)*
2.	Elev 4:	9 delt på 14 (2.0).
3.	Lærer:	9 delt på 14 (2.0). Ja, hvorfor skal vi dele på 14? (1.5)
4.	Elev 4:	Fordi det er så mange det er? (1.5)
5.	Lærer:	Uhm, ja ... men kan du forklare ... for egentlig er det ikke helt riktig. Uhm, men det ... du er, du er inne på det. Vi skal jo dele noe. Men vi kan ikke dele på 14 *(peker på x-ene på høyre side av vekta)*. Vi må dele på 9. For vi har 9 x-er, og vi vil, vi vil ende opp med én *x (holder oppe 1 finger)* (6.0). Vi må dele på det antallet vi har av x-er (3.0). Så vi kunne sagt: «Ok, jeg deler det her på 9 *(setter opp en brøkstrek og tallet 9 på siden av x-ene på høyre side av vekta)*, og så deler jeg det på 9» *(setter brøkstrek og tallet 9 på siden av strekene på venstre side av vekta;* ***se Figur 6d****)*. Da har vi opprettholdt balansen *(holder hendene slik at de balanserer mens han ser på elevene)* (3.0). Er dere med på tankegangen? *(Ingen av elevene svarer.)*

I utdraget over er det først og fremst tre aspekter som er verdt å merke seg. For det første er det en dialogisk episode som nærmest er en form for modifisert I-R-E-struktur. Denne kjennetegnes ved at en lærer står ved kateteret og initierer spørsmål som elever svarer på, og så følger læreren opp med enten å bekrefte/avkrefte eller å følge opp med flere spørsmål (Sandvik et al., 2013; Wells, 1999). Her observerer vi hvordan læreren forklarer i plenum hva de skal gjøre, initierer (I) dialog med en elev, får respons (R) og evaluerer svaret (E) der han ber om utdyping. Imidlertid svarer eleven feil, og tempoet i samtalen går ned ettersom både lærer og elev trenger tid for å poengtere hva de mener.

Det andre aspektet er at selv om oppgaven er å sette opp en relativt enkel brøk, så svarer eleven feil. Det indikerer at elevene kan ha problemer med grunnleggende regneferdigheter i matematikk, og at representasjonen er kompleks.

Det tredje aspektet er at læreren får eleven til å vise hvordan han tenker, og gir positiv tilbakemelding til tross for at svaret er feil. Læreren bruker ord som «ikke helt riktig» og at eleven «er inne på det». Imidlertid bruker ikke læreren veiledende spørsmål for å la eleven selv nøste opp feilen sin, men viser i stedet hvordan stykket skal settes opp. Det er rimelig å anta at læreren gjør det selv fordi han ønsker å avslutte episoden og legge vekt på poenget, at de har funnet hva én x veier og at vekta er i balanse.

Vi observerte at elevene tegnet ned vekta slik læreren gjorde i Figur 6a−d. Imidlertid ble den ikke henvist til i timene som fulgte, og elevene fortsatte sin praksis med «flytt og bytt»-metoden når det kom til likninger. Det er verdt å merke seg at Figur 6d viser at vekta har utviklet seg til en komplisert konstruksjon som man kan hevde ikke ser ut som en balansevekt lenger. Det poenget, sammen med alle de deiktiske referansene og gestene, viser at likninga i utgangspunktet kanskje var for komplisert med hensyn til poenget med balansering av en likning. I tillegg er det konseptuelle problemer med å vise et slikt uttrykk, siden det er minus på begge sider av vekta og læreren må operere med «minus vekt». Et uttrykk som for eksempel $x + 2 = 5$ kunne lettere latt seg illustrere med lærerens metode ved å fjerne 2 streker fra begge sider for å finne hva én x veier.

4.2.3 Elevers bruk av læremidler og ressurser

Det siste utdraget vi skal granske nærmere, handler om hvordan et elevpar bygger matematisk forståelse gjennom samtidig bruk av flere læremidler og ressurser. Utdraget inneholder både typisk og atypisk interaksjon med ressursene. Episoden utspiller seg mot slutten av undervisningsforløpet, der elevene har tatt i bruk digitale læremidler for å løse oppgaver til kapittel 3 i læreboka. Oppgaven er å løse likningssettene $\mathbf{y = 2x + 1}$ og $\mathbf{y = -x + 4}$ både grafisk og ved regning.

Utdrag 3

1.	Nora:	Det der er sånn to likninger med to ukjente greier. Det gjorde vi i tiende. (1.0)
2.	Heidi:	Jah ... Kan ikke nesten det der. Hvordan er det du gjør det? (1.0)
3.	Nora:	Åhh! Vent da. Uhm, y er lik ... Du må finne enten hva x er ...
4.	Heidi:	Ja. (1.7) Jah ...
5.	Nora:	Her eller her er det da.
6.	Heidi:	Ja, det er det jeg mener, men han gjorde slik at den her ... Han gjorde y1, ikke sant? Det er y1 og y2. Så det vil si ... det er sånn her *(skriver opp de to likningene)* 2x pluss 1 er lik minus 4 pluss 4. Nei, minus x pluss 4.
7.	Nora:	Er du sikker?
8.	Heidi:	Ja, jeg tror det er sånn.
9.	Begge:	*(Løser likninga for x i kladdeboka si. Læreren informerer samtidig at elevene skal finne x-verdien, men at de også kan skrive opp både x- og y-verdien som et punkt.)*
10.	Heidi:	Ja, for det er x-en *(sjekker i fasiten i læreboka og peker deretter på svaret i kladdeboka si).*
11.	Nora:	Ja, det er riktig da ... det er én.
12.	Heidi:	Ja, nå har jeg funnet bare x-en, men vi skal også finne y-en.
13.	Nora:	Seriøst?
14.	Heidi:	Ja.
15.	Nora:	Ja, men nå vet vi hva ...
16.	Heidi:	X-en er.
17.	Nora:	X her da, og da kan vi bruke den her da, ikke sant? *(Peker på den ene likninga, og de begynner å regne ut y-en.)* (2.5)
18.	Heidi:	Ok. Så sier vi x er lik a? (1.0) Nei.
19.	Nora:	Det blir liksom y er lik 2 ...
20.	Heidi:	Åja, åja. Y er lik 2 ganger 1 pluss 1 *(regner ut i kladdeboka).* Må du skrive den andre?
21.	Nora:	Da blir det 3, blir det ikke? *(Ser på grafene i GeoGebra. Der virker det uklart, siden y-aksen kun viser annethvert heltall: 0,2,4,6 etc.)*
22.	Heidi:	Men den andre og da. Y er lik ...
23.	Nora:	Jo, det blir 3. Bare se ... *(setter linjalen mot pc-skjermen og måler hvor streken går på y-aksen).* (3.0)
24.	Heidi:	Ja *(ser på skjermen).*
25.	Nora:	Hallo, det skulle vært sånn derre, åhh ...
26.	Heidi:	Jeg tror y blir 3. For vi skal finne y-en. Der er x-en *(peker på x-aksen i grafen).* Se her.
27.	Nora:	Åja *(ler).* (1.0) *(Zoomer inn grafen slik at y-aksen nå viser hvert heltall: 0,1,2,3 etc.)* Jo, se det er 3! Det er 3!
28.	Heidi:	Ja, y-en er 3.
29.	Nora:	Ja, og x-en er 1
30.	Heidi:	Ja *(ser på grafen).* Å↑åå↓ *(virker som hun har forstått det, og begge ler).*

I utdraget over observerer vi først hvordan Nora gjenkjenner denne typen likningssett fra ungdomstrinnet. Allikevel er begge elevene usikre på hvordan de skal løse likninger med to ukjente. Imidlertid kommer Heidi på hvordan læreren satte opp slike oppgaver tidligere i timen. Ved å imitere lærerens prosedyre får de opp en likning som de er vant med, 2x + 1 = -x + 4. Deretter klarer de å løse den likninga både for x og y.

For det andre observerer vi at de igjennom hele utdraget søker bekreftelse på at det de gjør er riktig. I begynnelsen er de opptatt med å bekrefte for hverandre at de bruker rett metode, deretter at selve utregninga er riktig, og at de får samme svar. Heidi sjekker også i fasiten at svaret for x er riktig. Etter at de også har regnet ut for y, setter Nora linjalen på PC-skjermen for å bekrefte at y-verdien hun har kommet fram til, stemmer med den hun har regnet ut. Elevene bruker her flere ressurser for å validere at det de har gjort er riktig: hverandres forståelse av problem og prosedyre, hverandres utregning, fasiten i læreboka og linjal og grafen i GeoGebra. Bruken av linjal mot skjermen var atypisk for klassen som helhet, men de fleste gjorde bruk av flere ressurser for å skape mening av likningssettene.

Et annet aspekt som var atypisk, var det tette samarbeidet mellom disse to elevene. I de fleste parene jobbet elevene stort sett individuelt, men sjekket ofte hverandres svar og metode. Dette paret derimot, samarbeidet ofte med å ramme inn oppgavene og løse dem. Videre observerer vi et tredje viktig poeng, og det er at forståelsen skapes gjennom hele episoden i utdraget. Selv om elevene løser likningssettene med den riktige framgangsmåten, så virker de ikke å ha forstått helt hva de har funnet ut. Heidi ønsker blant annet å finne y for det andre likningssettet. Ikke før grafen viser både x-aksen og y-aksen som enkle heltall og de sier høyt til hverandre hva x-verdien og y-verdien for krysningspunktet er, virker det som de gjør en oppdagelse om hvorfor likninga er en relevant representasjon av de to funksjonene i grafen.

4.2.4 Bruk av læremidler og ressurser i klasserommet: en oppsummering

I intervjuet uttrykte læreren at han ønsket å vise og illustrere at det fantes forskjellige måter å tenke matematisk på. Dette har vi belyst med utdrag fra de mest typiske arbeidsformene fra avsnitt 4.1. I første utdrag prøver elevene ut forskjellige måter å tenke matematisk på ved å bruke to metoder for å løse én og samme oppgave fra oppgaveheftet. I episodene 2a−c ønsker læreren i en plenumssituasjon å problematisere konseptet «flytt og bytt». Ved hjelp av en tegning av en vekt skulle læreren vise elevene at det egentlig handlet om å balansere likninga. Læreren henviser til elevene som går «påbygg» og deres diskusjon rundt denne visualiseringa, som ga mening for dem, men i møte med 1T-elevene bryter denne visualiseringa sammen. Hovedgrunnen er kanskje at likninga som vekta skal uttrykke, er unødvendig komplisert. En kanskje like viktig årsak er at læreren skapte framstillinga av vekta for 1T-elevene i høy grad gjennom monolog. Monologen i episodene 2a−c står i kontrast til episode 3 der dialogen mellom elevene tydeligere viser matematisk meningsdannelse.

Når elevene jobbet individuelt eller i grupper med læremidler og ressurser, så vi at de brukte mye tid på å bekrefte at det de hadde gjort, var riktig − vanligvis ved å se i fasiten eller å sjekke svaret til parkameraten. Hvis elevene ifølge fasiten fikk galt svar på en oppgave etter gjentatte forsøk, tilkalte de som regel læreren. I første episode viser vi hvordan to elever får feil svar selv om de får samme svar med to ulike metoder. De påkaller læreren, som sammen med elevene bruker tid på å gjennomgå løsningene. Læreboka og fasiten er institusjonelle autoriteter og viktige rettesnorer for matematisk arbeid i klasserommet. Det er sjelden fasiten tar feil, og læreren vil heller ta seg god tid på å kryssjekke elevenes løsningsmetoder før han utfordrer den ved hjelp av andre metoder.

I siste episode observerer vi et par som samarbeider og søker å skape og validere forståelse uten å tilkalle læreren. Gjennom felles avklaring av problem og prosedyre, ved å sjekke hverandres utregning, ved å kikke i fasiten og å bruke linjal for sjekke grafen i GeoGebra, observerer vi hvordan elevene sammen klarer å skape mening ut av forskjellige representasjoner, og hvordan deres forståelse utvikles over tid (White & Pea, 2011). Gjennom dialog og ulike representasjoner skaper elevene delforståelse hele veien, men først når de observerer krysningspunktet med riktig skala og sammen sier høyt til hverandre hva x-verdien og y-verdien for krysningspunktet er, virker det som at bitene faller på plass.

4.3 Engasjement og læring

Det tredje og siste forskningsspørsmålet er knyttet til hvordan bruk av læremidler og læringsressurser bidrar til engasjement og læring hos elevene. Når vi observerte elevene i 1T, virket de veldig fokuserte. Det var lite støy og utenomfaglig snakk. Elevene deltok engasjert i helklassesamtaler og diskusjoner når læreren tok initiativ til det, og de jobbet fokusert med oppgavene både individuelt og i par. Etter at de digitale læremidlene ble tatt i bruk, observerte vi rikere interaksjonsformer og noe mer engasjement mellom elevene. Elevene fikk prøve ut dynamiske framstillingsformer sammen med mer tradisjonelle læremidler som lærebok og kladdebok, noe som også skapte betingelser for litt mer samarbeid i parene (se vedlegg 2c).

I intervjuet sa læreren seg enig i at elevene generelt virket engasjerte, og ga flere grunner til det. Ifølge læreren er 1T kjent som et vanskeligere fag sammenliknet med andre fag på første året, og elevene hadde selv valgt å prøve seg på dette nivået. For det andre hadde elevene vært gjennom en filtreringsprosess som gjorde at de som ikke holdt mål, ble bedt om å gå over til 1P. Det at elevene hadde valgt selv og fortsatt var under oppsyn med hensyn til om de holdt 1T-nivået, var ifølge læreren hovedgrunnen til at elevene virket fokusert. I tillegg mente han at «kameraeffekten», ved at forskerne var til stede, også kunne bidra litt. Det ble også gjennomført en kapittelprøve fra kapittel 2, med karakter, i tillegg til pre- og posttestene. Læreren nevnte i planleggingsfasen av studien at begrunnelsen for å gjennomføre en kapittelprøve nettopp var å få elevene til å jobbe fokusert med fagstoffet over flere dager.

Elevene på sin side bekreftet delvis det læreren sa. De sa under intervjuet at de i hovedsak likte matematikk, og flere syntes det var mer engasjerende enn andre fag. Men flere var usikre på om de klarte dette løpet i matematikk. Dette var tydelig i videoopptakene av fokusgruppene, der elevene virket delt på om de kom til å klare det, eller om de skulle gi seg og så bytte til 1P. I en av gruppene ville for eksempel den ene eleven ta 1T med en gang for å konsentrere seg om få gjort unna det hun anså som kanskje det vanskeligste faget, mens parkameraten ønsket å gjennomføre de vanskeligste fagene så godt det lot seg gjøre, for å holde alle dører åpne for en senere karriere.

Det ble foretatt pre- og posttester for å måle elevenes læringsutbytte (se vedlegg 2a og b). Pretesten ble foretatt rett før selve undervisningsforløpet startet, mens posttesten ble tatt rett etter, men før intervjuene. Imidlertid viste paret tohalet t-test ingen signifikant framgang i prestasjon fra pretest til posttest ($p >$,05) for elevene som deltok (vedlegg 2e). Det var heller ikke signifikant forskjell mellom prestasjonene på kapitlene før og etter at digitale læremidler ble tatt i bruk ($p >$,05). I tillegg deltok kun 8 av 21 elever på både pretest og posttest, noe som tilsier at testen har lav gyldighet. Vi har derfor valgt å se bort fra testene som mål på læringsutbytte.

Vi fikk også delvis observert elevenes kompetanse og læringsutbytte da de hadde prøve knyttet til kapittel 2 (vedlegg 2f) underveis i forløpet. Prøven besto av fem oppgaver hentet fra læreboka og må regnes som repetisjonsoppgaver fra ungdomstrinnet. Den første oppgaven var å regne ut 4(3 - 1) + 7(-2) - 3(2 - 4), og omhandler regnerekkefølge og multiplikasjon med negative tall. Av de parene vi observerte ved hjelp av video, klarte tre av seks elever denne oppgaven, og de som ikke klarte den, misset på multiplikasjon med negative tall. Leddet + 7(-2) regnet de ut til å bli +14 istedenfor -14, og dermed ble sluttsummen feil. Oppgave 2 var et algebrauttrykk bestående av ledd og faktorer der også regnerekkefølge og multiplikasjon med negativer var aktuelt. Også her var det tre av seks i fokusgruppene som klarte denne oppgaven. Deretter fulgte to brøkoppgaver med algebrauttrykk som ingen i fokusgruppene klarte, og til sist en faktoriseringsoppgave med algebrauttrykk som to av seks klarte. Resultatene fra prøven ga oss en liten indikasjon på at noen av elevene i fokusgruppene slet med en del grunnleggende regneregler knyttet til matematikk.

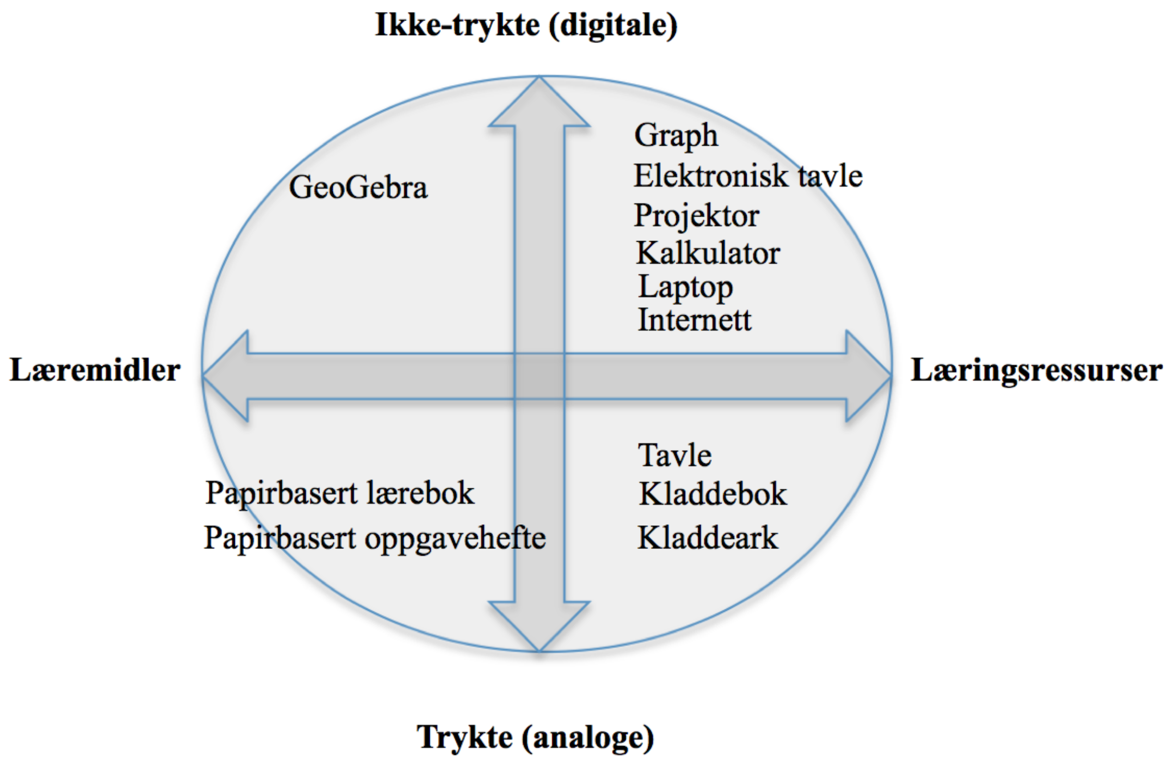
I intervjuet med lærer i etterkant stilte vi ikke direkte spørsmål om elevenes prestasjon på pre- og posttesten og kapittelprøven, men vi kom inn på pensumet i de første kapitlene i 1T og hvor elevene sto matematisk når de begynte med 1T:

Intervjuer:	Hvis du ser på matematikken − dere plukker jo opp sånn tiendeklasse-pensum i starten? Gjør dere ikke?
Lærer:	Ja.
Intervjuer:	Er det en slags oppvarmingsfase for å håndtere den faglige overgangen?
Lærer:	Ja, det er det veldig. Det er jo fordi at når vi får elever til oss, så er det eneste vi i utgangspunktet har av informasjon, det er to ting: Det ene er at vi har informasjon om deres karakterer fra ungdomsskolen. Det sier oss ofte ikke så veldig mye. Det gir jo en pekepinn, men en treer i matematikk trenger ikke å bety at man egentlig kan det man skulle lært i 8., 9. eller 10. klasse. Altså, det kan være mye forskjellig bak en treer eller en toer i matematikk. Og så har du erfaringen vår med elevene som vi normalt sett får. Det er de to tingene vi baserer det på. Og da viser det jo seg at det å egentlig gå et godt stykke tilbake i årstrinnene og plukke opp elementer og si at dette er basisen, og at dette er det vi kommer til å jobbe videre fra, det er helt avgjørende. For ellers har vi mistet mange før vi har startet på det vi skal se på.

Fra intervjuet med læreren er det klart at elevenes matematiske kompetanse i overgangen fra ungdomstrinnet til videregående skole oppfattes som problematisk av lærerne ved skolen. Elevenes karakter fra ungdomstrinnet gir kun en pekepinn om hvor elevene står, og lærerne vet av erfaring at de må gjennomgå mange grunnleggende ferdigheter i matematikk for å gjøre elevene skikket til å arbeide på dette nivået. I tillegg har elevene tilgang på leksehjelp, og læreren kunne av erfaring si at de elevene som benyttet seg av det tilbudet, har godt utbytte av det. Læreren informerte elevene i første undervisningstime vi var der (dag 3) om at flere av dem slet såpass med matematikken i kapittel 2 at de burde oppsøke leksehjelpen. Imidlertid sa læreren under intervjuet at elevene i 1T gjerne venter til slutten av 1. termin med å søke til leksehjelpen. Av elevene som ble intervjuet, var det ennå ingen som hadde deltatt på det.

5 Drøfting av funn

I denne casen i matematikk har vi fulgt et 3-ukers undervisningsopplegg i 1T – Vg1 studieforberedende utdanningsprogram med *tall og algebra* som tema. Aktiviteten har vekslet mellom helklasseaktivitet, arbeid i gruppe og individuelt arbeid. I våre drøftinger av funn vil vi starte med å plassere læremidlene og læringsressursene som er brukt i undervisningsforløpet, langs to akser basert på definisjonen av læremidler og læringsressurser (se vedlegg 1a).



Figur 7. Bruk av læremidler og læringsressurser i casen matematikk 1T, VGS.

I denne casen inngår institusjonelle strukturer, lærerens opplegg, undervisnings- og læringsformer og elevgruppens kompetanse og motivasjon i komplekse sammenhenger med læremidler, læringsressurser og andre hjelpemidler i klasserommet. Samvirket mellom disse elementene har vist seg som sentralt i alle studiene, og forsøk på spesifikt å rette søkelyset mot enkeltelementer virker mindre fruktbart. Det som er relevant i denne studien, er analysen av hvordan læremidler, læringsressurser og hjelpemidlene som er i bruk, samvirker med hverandre og de andre delene i undervisnings- og læringssituasjonen.

Det tydeligste generelle trekket ved lærerens undervisning i denne casen er hvordan han insisterer på å fremme forståelse hos elevene. I lys av de fem delkompetansene til Kilpatrick et al. (2001) (referert i avsnitt 2.1) ser vi hvordan læreren vil stimulere til begrepsforståelse og resonneringskompetanse, og også til engasjement, som er den affektive dimensjonen. Denne tilnærmingen kom tydelig til uttrykk i undervisningssituasjonen i klasserommet og ble også eksplisitt uttrykt av læreren i intervjuet med ham. Prosedyreferdigheter som teknikker for å løse standard oppgaver kan være fristende å ty til når mer generell matematikkforståelse virker for vanskelig. Men i denne casen vil læreren fremme forståelse av begreper og resonnering, og han ser på det som en langsiktig investering som senere kan gi dypere læringsprosesser. Han gjør også dette for å fremme engasjement hos elevene. I intervjuet var han tydelig på at denne framgangsmåten ikke gir kortsiktig gevinst i form av gode prøveresultater, men at den eneste veien fram mot engasjement i faget over tid skapes gjennom forståelse og ikke bare gjennom innlæring av prosedyrer.

Med øye for elevenes begrepslæring, resonneringsferdigheter og engasjement, studerte vi lærerens og elevenes bruk av læremidler og læringsressurser. I undervisningssituasjonen, enten som plenumsforelesning eller som klassediskusjon, brukte læreren tavla. Noen ganger var det med eksempler fra læreboka, men like gjerne med egne representasjoner og eksempler. Læreren anvendte flere kilder for å stimulere begrepsforståelsen og resonneringen i elevgruppen. Metaforer, som for eksempel en vekt for en likning, ble brukt for å vende elevenes oppmerksomhet mot noe konkret og søke en annen mulig inngangsport for forståelse, i dette tilfellet forståelse av ekvivalens (se f.eks. Alibali et al., 2007; Kieran, 2007; Naalsund, 2012).

Læreren hadde også en utpreget aksepterende holdning til forslag som kom fra elevene når han gikk gjennom eksempler. Selv om elevenes svar ikke var riktige, søkte han å reformulere dem og finne elementer i forslagene på en måte som kunne gjøre dem mer riktige, eller som på en annen måte kunne gi uttrykk for en riktig forståelse. Dermed skapte han en åpen stemning i klasserommet, samtidig som han fikk presentert flere forskjellige tilnærminger til hvordan algebra kan håndteres, og dermed stimulerte elevenes resonneringsferdigheter (se f.eks. Carraher & Schliemann, 2007; Cobb et al., 2001; Maher, 2005; Weber et al., 2008).

Det å vektlegge flere alternative tilnærminger for å løse et problem er en sentral del av Kilpatrick et al.'s kompetanse «prosedyreferdighet», som går på å trene opp en fleksibilitet i løsningsstrategier (ibid., 2001). Ved å se at det finnes flere «veier til målet», vil man øve en dypere prosedyrekunnskap, samtidig som det kan bidra til å skape en dypere forståelse av det matematiske fenomenet bak prosedyrene. Ved å øve på dette i en diskusjon der elevene må argumentere og forklare sine tanker, øves også resonneringskompetansen. Disse aspektene illustrerer hvor tett sammenvevd de ulike delkompetansene er i læreprosessen (Kilpatrick et al., 2001).

Våre observasjoner viser videre at elevene var konsentrerte i plenumssesjonene, og det var lite aktivitet vi kunne observere som ikke dreide seg om matematikken. De fleste hadde bidrag og forslag til løsninger, selv om det hendte at læreren måtte utøve et visst press og henvende seg direkte til enkeltelever for å få svar.

I undervisningsopplegget for plenumsaktivitetene var det lærerens erfaring og eksempelkunnskap som var mest relevant, mens læremidlene var mer i bakgrunnen. Læreboka spilte i disse situasjonene en rolle ved å beskrive enkelte eksempler, men den var ikke sentral. Lærerens viktigste læringsressurs i plenumssesjonene var tavla, mens elevene brukte kladdebok, men også digitale læremidler som Graph og GeoGebra ble brukt. Igjen ser vi at undervisningsopplegget gjorde bruk av flere læremidler og ressurser. Lærerens forklaring og andre elevers forslag ga elevene en mangefasettert og kompleks inngang til nytt materiale, men samtidig mange muligheter for forståelse.

I kapittel 2 presenterte vi åtte undervisningspraksiser som skal fungere som et rammeverk for å styrke læring og undervisning i matematikk (NCTM, 2014). Hvis vi ser lærerens intensjoner for undervisningen i relasjon til disse reglene for god undervisningspraksis i matematikk, er det mange likhetspunkter. Han utfordret elevene til resonnering og problemløsning i klasserommet, som er NCTM-rapportens 2. retningslinje. Ved å ha forskjellige innganger til oppgavene oppmuntret han elevene til å prøve ulike metoder for løsning. Enda tydeligere er lærerens praksis med å bruke representasjoner og stimulere elevene til å se sammenhenger mellom dem, som er den tredje retningslinjen fra NTCM. Begge geometriverktøyene som er i bruk i klassen, er velegnet for slike multirepresentasjoner, ved at likninga og det grafiske uttrykket for den kan representeres og manipuleres i samme grensesnitt, og sammenhengen mellom dem blir eksplisitt. Ved likningsett med to ukjente leser elevene svaret direkte ut av grafen som genereres av disse verktøyene, i tillegg til at de løser dem analytisk ved utregning, og de sammenligner svarene. Ved å vektlegge ulike representasjoner (kontekstuelle, visuelle, verbale, fysiske og symbolske) gis elevene mulighet til å studere det matematiske fenomenet gjennom ulike linser, der hver og en gir et ulikt perspektiv som igjen vil bidra til å gjøre fenomenet rikere og gi en dypere forståelse.

Læreren var i intervjuet tydelig på at han ønsket å få elevene til å diskutere matematikk (retningslinje 4, NTCM, 2014) og gjøre bruk av elevenes forståelse ved å spørre dem relativt inngående om deres resonnementer (retningslinje 8, NTCM, 2014). Selv om han mislyktes med det relativt kompliserte vekteksempelet, fantes det episoder i våre observasjoner der han lyktes bedre. Det var viktig for ham å gi anerkjennelse til elevene med utgangspunkt i de svarene han fikk, og derigjennom bygge opp elevenes selvtillit i faget.

Noen av plenumssesjonene gjorde læreboka mindre relevant som verktøy. Det samme var tilfelle med andre læremidler, læringsressurser og hjelpemidler. I disse situasjonene var læreren ute etter elevenes verbale matematikk-kompetanse, og han brukte deres umiddelbare resonnementer til å gi flere mulige innganger til algebraiske løsninger. Da fikk han både tilgang til det forståelsesnivået de hadde, og han fikk mulighet til å kommentere det og til å bygge videre på deres forståelse for å skape diskusjon og gi retning til resonnementene. I andre plenumssesjoner ga han dem noe tid til å løse oppgaver individuelt, og delvis i par, og å gi svar. Da anvendte elevene flere ressurser: grafisk verktøy, lærebok, utregninger i kladdebok, fasit og ikke minst sine medelever, for å prøve ut sine framgangsmåter og sjekke sine svar. Da blir samvirket mellom disse ressursene og hvordan de inngår i dialogen mellom lærer og elever, viktig.

I veiledningssituasjonene læreren hadde med elevene, enten individuelt eller i par, ble læreboka og oppgaveheftet mer sentrale. Da valgte læreren å være tettere på læringsstandarden slik den kommer til uttrykk i en lærebok. Det kan ha vært uttrykk for at læreren i disse situasjonene ønsket å falle ned på en mer prosedyreorientert tilnærming. Elevene hadde i plenum vært eksponert for forskjellige måter å formulere algebra på og ulike løsningsforslag. I veiledningssituasjonene rammet gjerne læreren først inn oppgaven med å spørre hva som var elevenes problem og hvordan de hadde løst oppgaven i kladdeboka. Deretter gjennomgikk han gjerne detaljert sammen med elevene deres løsningsforslag, der de måtte forklare hvorfor de hadde valgt å løse delproblemer i oppgaven på den måten de gjorde. Læreren og elevenes dialog omkring elevenes stegvise løsningsforslag, sammen med bruk av oppgave, kladdebok, fasit og digitale læremidler, ga alle bidrag til elevenes matematiske forståelse.

Læreren hadde som tidligere nevnt et eksplisitt ønske om å fremme forståelse hos elevene. Det ble vektlagt også som en investering for videre læring i matematikk. Læreren ville ikke at de skulle se på matematikken som et sett av teknikker for symbolmanipulering, men mer som et meningsbærende språk. Det er ingen grunn til å tro at den undervisningsmodellen gir størst mulighet for uttelling i form av bedrede prøveresultater innenfor rammen av den 3-ukers perioden vi observerte klassen og læreren. Her ville sannsynligvis mer vekt på «drill-and-practice» på kort sikt gitt større effekt. I tillegg tyder observasjonene og intervjuet på at læreren drev dette som en investering i tillitskapende arbeid. Elevene skulle få lov til å gi uttrykk for ulike oppfatninger av algebra, uten bastante responser om «riktig» og «galt». Elevene skulle venne seg til å ytre seg om matematikk i klassen. Med dette fikk de også tilgang til forskjellige tilnærminger til løsninger og syn på temaet algebra fra sine medelever, og læreren fikk forskjellige utgangspunkt han kunne utforske i plenum. Det gir ikke uttelling på kort sikt med effektivitetsmål som framgang fra pretest til posttest, men kan gi mening som en langsiktig investering.

5.1 Konklusjon

Vi har tre hovedspørsmål i denne undersøkelsen. Det første spørsmålet er hvordan læremidler og ressurser benyttes i undervisningsopplegget. Læreboka spiller en rolle som grunnressurs gjennom hele undervisningen. Den fungerer som et utgangspunkt for eksempler og som oppgavesamling. Den er mindre viktig i de utforskende samtalene læreren ønsker å fremme i plenum, men for konkret oppgaveløsning og referanse er den sentral. Dette funnet er i tråd med tidligere forskning, som peker på læreboka som det viktigste læremiddelet i skolen (Juuhl, Hontvedt & Skjelbred, 2010; Knudsen et al., 2011; Pepin, Gueudet & Trouche, 2013; Skjelbred, Solstad & Aamotsbakken, 2005). De digitale verktøyene blir viktige supplementer i oppgaveløsningen, med sine alternative visualiseringer og en mer dynamisk presentasjon av et tema.

For det andre undersøkte vi hvordan læremidler og ressurser bidrar til engasjement og læring. Ved at de utnytter de dynamiske framstillingsmåtene i de grafiske hjelpemidlene utvider elevene også sitt studieobjekt, algebra, og kan se relasjoner til andre deler av matematikken. Våre data viser at variasjon i framstillingsmåter gjør interaksjonene åpnere og fremmer elevenes engasjement. Som kortsiktig læringsstrategi for å maksimere forbedring som kan måles på en test, fungerer dette ikke så godt, men som en strategi i overensstemmelse med en forskningsmessig tilnærming til de delkompetansene matematikkforståelse består av (se Kilpatrick et al., 2001; NCTM, 2014), har tilnærmingen potensial for å lykkes på lengre sikt.

For det tredje undersøker vi hvilken rolle læremidler og ressurser har i interaksjonen mellom lærer og elever og mellom elevene. I vårt materiale er variasjon i representasjoner det som framtrer tydeligst. Den gir parene som arbeider sammen, tilgang til materiale i flere former, og det stimulerer deres diskusjon − først og fremst gjelder dette dynamisk grafikk gjennom GeoGebra eller Graph, som sammenholdes med lærebokas oppgaver, løsningsforslag og fasit, og med notater de henter fra kladdeboka. I dialogen der læreren skal støtte elevene, gjerne mens de sitter i par, er læreboka mest relevant, som referanseverk for den kanoniserte modellen for algebra.

Læreren i denne casen har en bevissthet om, og vektlegger i sin undervisning, sentrale matematiske kompetanser (Kilpatrick et al., 2001), noe som ikke er typisk for matematikkundervisningen i Norge (Bergem, 2009; Grønmo et al., 2012; Klette, 2009; Klette, 2013; Olsen, 2013; Sandvik et al., 2013). Særlig er han opptatt av begrepsforståelse, resonnementskompetanse og engasjement. Dette søker han å fremme ved å integrere flere av undervisningspraksisene anbefalt av NCTM (2014) for å drive matematikkundervisning for en bred kompetanse, slik det er beskrevet av Kilpatrick et al. (2001). Særlig opptatt er han av å bruke og se sammenhenger mellom ulike representasjoner som et virkemiddel for begrepsdannelse og matematisk forståelse. Han ønsker å legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs hvor hans rolle er å stille målrettede og veiledende spørsmål til elevene. Det gir kanskje ikke uttelling over en periode på 3 uker, men kan gi uttelling på lengre sikt.

Referanser

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and learning, 9*(3), 221-247.

Ball, D. L. & F. M. Forzani (2011). "Building a Common Core for Learning to Teach and Connecting Professional Learning to Practice." *American Educator 35*(2), 17-21.

Bergem, O. K. (2009). *Individuelle versus kollektive arbeidsformer: En drøfting av aktuelle utfordringer i grunnskolen*. Oslo: Det utdanningsvitenskalpelige fakultet, Universitetet i Oslo.

Carraher, D. W. & A. Schliemann (2007). Early Algebra. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J.J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades.* New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, *10*(1&2), 113–163.

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, *112*, 155–159.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London: Routledge.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches.* London: SAGE Publications.

Diziol, D., Rummel, N., Spada, H. & McLaren, B. (2007). Promoting learning in mathematics: Script support for collaborative problem-solving with the cognitive tutor algebra. *In the Proceedings of the Conference on Computer-Supported Collaborative Learning (CSCL 2007).*

Dolonen, J. A., & Ludvigsen, S. R. (2012). Analysing students' interaction with a 3D geometry learning tool and their teacher. *Learning, Culture and Social Interaction, 1*(3-4), 167–182. doi: 10.1016/j.lcsi.2012.08.002

Egeberg, G., Gudmundsdottir, G.B., Hatlevik, O.E., Ottestad, G., Skaug, J.H., & Tømte, K. (2012). *Monitor 2011. Skolens digitale tilstand*. Oslo: The Norwegian centre for ICT in Education.

GeoGebra team. (2013). *Introduction to GeoGebra Version 4.4*. Lastet ned 12.02.2015 fra http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo, Akademika forlag.

Jensen, F. & G. Nortvedt (2013). Holdninger til matematikk. I M. Kjærnsli and R. V. Olsen (Eds.). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo, Universitetsforlaget.

Juuhl. K. G., Hontvedt, M. & Skjelbred, D. (2010). *Læremiddelforskning etter LK 2006. En kunnskapsoversikt*. Høgskolen i Vestfold, Rapport nr. 1/2010.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 707-762. Charlotte, NC: Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Klette, K. (2009). *Challenges in Strategies for Complexity Reduction in Video Studies. Experiences from the PISA+ Study: A video study of teaching and learning in Norway*. Münster: Waxmann Publishing.

Klette, K. (2013). *Hva vet vi om god undervisning? Rapport fra klasseromsforskningen.* Bergen, Norge: Fagbokforlaget.

Knudsen, S. V. et al. (2011). *Internasjonal forskning på læremidler: en kunnskapsstatus.* Tønsberg: Høgskolen i Vestfold.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education 37*(4): 297-312.

Kunnskapsdepartementet (2011). *Fra matteskrekk til mestring*. Oslo.

Kunnskapsdepartementet (2012). *Motivasjon og mestring for bedre læring*. Oslo.

Li, Q. & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educ. Psychol. Rev. 22*, 215–243.10.1007/s10648-010-9125-8

Linell, P. (1998). *Approaching dialogue: Talk, interaction and contexts in dialogical perspectives*. Amsterdam: John Benjamins.

Linell, P. (2009). *Rethinking language, mind, and world dialogically: Interactional and contextual theories of human sense-making.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lou, Y., Abrami, P. C., & d'Apollonia, S. (2001). Small group and individual learning with technology: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 71*(3), 449–521.

Maher, C. A. (2005). How students strucutre their investigations and learn mathematics: insights from a long-term study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*: 1-14.

Maher, C. A., Powell, A. B., Weber, K., & Lee, H. S. (2006). Tracing middle-school students' arguments. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, Mexico, Universidad Pedagógica Nacional.

Moyer, P. S. (2002). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*: 175–197.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. Oslo: Universitetet i Oslo.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2008). *Algebra, What, When, and for Whom. A position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Retrieved 15. May, 2011, from http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Algebra%20final%2092908.pdf.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nortvedt, G. (2013). *Resultater i matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2009). *Sinus 1T. Grunnbok i matematikk for Vg1.* Oslo: J.W. Cappelens Forlag A.S.

Olsen, R. V. (2013). Undervisning i matematikk. I M. Kjærnsli and R. V. Olsen (Eds.). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo, Universitetsforlaget

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions : a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 45*(7), 929-943.

Sandvik, L. V., Buland, T., Engvik, G., Fjørtoft, H., & Langseth, I. (2013). *Vurdering i skolen. Operasjonaliseringer og praksiser. Delrapport 2 fra prosjektet «Forskning på individuell vurdering i skolen« (FIVIS)*. Trondheim: NTNU, Program for lærerutdanning og SINTEF.

Skjelbred, D., Solstad, T. & Aamotsbakken, B. (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis*. Tønsberg: Høgskolen i Vestfold.

Utdanningsdirektoratet (2014). *Matematikk i norsk skole anno 2014.* Faggjennomgang av matematikkfagene ‐ Rapport fra ekstern arbeidsgruppe oppnevnt av Utdanningsdirektoratet. Lastet ned 12.02.2015 fra http://www.udir.no/Tilstand/Forskning/Rapporter/Ovrige-forfattere/Matematikk-i-norsk-skole-anno-2014/

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 247-261.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry. Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*. Cambridge, MA, Cambridge University Press.

Yin, R. K. (2013). *Case study research: Design and methods.* 5th ed. London: SAGE Publications.

Vedlegg 1a: Definisjon av læremidler, teori og forskningsdesign

Formålet med forskningsprosjektet *ARK&APP* er å undersøke læremidler i bruk i fire utvalgte fag: samfunnsfag, engelsk, matematikk og naturfag. I casestudiene er vi særlig opptatt av *hva* slags læremidler som brukes, *hvordan* de brukes, og *hvilken* innvirkning dette har på samtalene og aktivitetene i klasserommet. De 12 casestudiene i prosjektet undersøker dette gjennom intervjuer, observasjoner, pre- og posttest og innsamlede læremidler og tekster fra klasserommene. Det blir særlig lagt vekt på tre av de fem forskningsspørsmålene som finnes i prosjektet:

- Hvordan benyttes læremidlene i undervisningsopplegget?
- Hvilken funksjon har bruken av læremidlene i interaksjonen mellom lærer og elever?
- Hvordan bidrar bruk av læremidlene til engasjement og læring hos elever?

De to første forskningsspørsmålene belyser situasjoner der læremidler brukes i interaksjon mellom lærer og elever og mellom elever. Med et sosiokulturelt perspektiv på læring får vi en forklaringskraft til hvilken funksjon læremidlene har (som artefakter) i sosial interaksjon mellom individene som utgjør læringsfellesskapet. Det er derfor avgjørende å observere dette systematisk og ta samtalene opp på video, slik at vi kan analysere hvordan læremidler blir tatt i bruk i interaksjonen.

Det tredje spørsmålet er knyttet til hvordan bruken av læremidler bidrar til læring hos elevene. Forskningsdesignet i *ARK&APP* inneholder ikke tester for å måle elevers motivasjon spesielt, men vi forstår elevenes deltagelse som et uttrykk for motivasjon i læringsaktivitetene. Våre observasjoner og opptak av elevsamtaler og elev–lærer-samtaler er et viktig datamateriale for å forstå motivasjon som engasjement. Hvordan læremidlene bidrar til læring hos elevene, drøftes med bakgrunn i resultatene på pre- og posttesten.

Definisjon av læremidler

De siste 10 årene har det blitt gjennomført tre kartlegginger av læremidler i norsk skole. Dette er Rambølls *Kartlegging av læremiddel og læremiddelpraksis* (Utdanningsdirektoratet, 2005), og *kartlegging av læremiddel og Læremiddelpraksis* (Skjelbred, Solstad, & Aamotsbakken, 2005) fra HiVe, *Læremiddelforskning etter LK06 – Eit kunnskapsoversyn* (Juuhl, Hontvedt, & Skjelbred, 2010), *Internasjonal forskning på læremidler – en kunnskapsstatus* (Knudsen, 2011) fra HiVe. Fra 2005 finnes det også en doktorgradsavhandling basert på en større, nasjonal lærerundersøkelse om lærebokas betydning i arbeidet med Reform 97 (Bachmann, 2005). Tilsvarende temaer blir omtalt i den første delrapporten i evalueringen av Kunnskapsløftet, *Læreplan, læreverk og tilrettelegging for læring* (Rønning et al., 2008). I den grad læremidler er definert i disse rapportene, opereres det med en vid forståelse av læremidler, som også omfatter ressurser som læreren eller elever bruker i undervisningen.

Caserapportene i forskningsprosjektet *ARK&APP* skal vise hvordan trykte og ikke-trykte læremidler brukes sammen med andre typer kilder og læringsressurser i fire ulike fag. I opplæringslova er læremidler definert på denne måten etter Kunnskapsløftet:

> Alle trykte og ikkje-trykte element, enkeltståande eller slike som går inn i ein heilskap som er utvikla til bruk i opplæringa, og som aleine eller til saman dekkjer kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Læremiddel kan vere trykte og digitale. (Lovdata, forskrift til opplæringslova, paragraf 17-1)

I forskningsprosjektet *ARK&APP* kategoriserer vi ressursene for læring som benyttes av lærere og elever, som (1) pedagogisk tilrettelagt materiale, det vil si trykte eller ikke-trykte *læremidler*, og (2) materiale som er brukt til læring, det vil si *læringsressurser* som ikke er designet for skolen eller læring spesielt, for eksempel Wikipedia, en datamaskin eller en film. Denne distinksjonen er viktig for å analysere læremidlers og ressursers funksjon med hensyn til læring i interaksjonen mellom lærer og elever. Læremidler og andre typer kilder og læringsressurser (i rapportene: *ressurser for læring/læringsressurser*) brukes av læreren og av elevene på ulike måter kombinert med de forskjellige arbeidsmåtene som finner sted i undervisningsforløpet. Vi oppfatter skolens læremiddelkultur i dag som en «blandingskultur». I denne kulturen har læreboka fremdeles en sentral rolle, men samtidig blir ulike analoge og digitale ressurser for læring tatt i bruk i stadig større grad (Egeberg et al., 2012; Hatlevik, 2011). Denne blandingskulturen – med både tradisjonelle, ofte trykte læremidler sammen med digitale læremidler og ressurser for læring – preger i dag norske klasserom. Forlagene har også en tilsvarende blanding, da en rekke av læreverkene har tilleggsoppgaver og opplegg på relaterte nettsider.

Teoretisk utgangspunkt

Et sosiokulturelt perspektiv vektlegger at læring skjer gjennom deltagelse i et fellesskap (Cole, 1996; Dysthe, 2001; Lave & Wenger, 1991; Rogoff, 2003). Et læringsfellesskap blir skapt av både deltagerne og de læremidler og ressurser for læring som de har til rådighet. Sosiokulturell teori vier stor oppmerksomhet til en analyse av læremidler, fordi perspektivet framhever hvordan kunnskapen blir mediert. I denne prosessen er kulturelle verktøy som læringsressurser og læremidler helt sentrale i skolens arbeidsmåter. Et sosiokulturelt perspektiv gir forklaringskraft til å analysere læring slik den foregår ved hjelp av disse semiotiske og materielle ressursene. Læring over tid forstås da som en endring i observert handling i bruken av artefakter blant dem som deltar i fellesskapet (Gee & Green, 1998, p. 147; Rasmussen, 2012). Individenes bidrag av kunnskap og ferdigheter i undervisningsforløpet, der ulike læremidler og ressurser for læring er i bruk, forstås som uttrykk for kompetanse hos individene slik den artikuleres i den sosiale interaksjonen. Dette gjør observasjoner og videodata nødvendig som metodisk inngang.

Å analysere semiotiske og materielle «elementer» krever også en analytisk inngang for å forstå hvordan bilder, tegn og skrift er satt sammen i læremidler og ressurser for læring. Hver av disse uttrykksformene representerer en mulig ressurs for kommunikasjon og læring. Semiotiske og materielle ressurser betegnes som modaliteter innenfor sosialsemiotikken (Gilje, 2008a, 2008b; Hodge & Kress, 1988; Selander & Kress, 2010). Dette kan som nevnt være skrift, tegn og bilder, men også tale, farger, musikk og levende bilder. Alle slike modaliteter er formet gjennom ulike undervisningspraksiser over tid. Hver modalitet har derfor et meningspotensial som følge av den verdi fellesskapet har tillagt den semiotiske ressursen over tid (Kress, 2010). Norsk skole har en læremiddelkultur der skrift er en foretrukket modalitet for kommunikasjon og læring. Men det er også lange tradisjoner i skolen for å bruke bildeplansjer, kart, tavletegning og lysbilder, ressurser for kommunikasjon og læring som bygger på andre modaliteter enn skrift. Framveksten av digitale læringsressurser problematiserer skillet mellom den skriftbasert og den visuelle læremiddelkulturen.

Forskningsdesign

Med utgangspunkt i de nevnte metodene har forskerne utarbeidet en rekke måleinstrumenter for å sikre et helhetlig forskningsdesign på tvers av de tolv casestudiene som utføres. Disse instrumentene utgjør et observasjonsskjema, intervjuguider og en pre- og posttest. Disse tre instrumenttypene brukes gjennomgående, med de nødvendige variasjoner det er behov for, i alle casene.

Observasjonsskjemaet er utarbeidet for å systematisk undersøke hvordan læremidlene brukes i undervisningsopplegget: Hvilke læremidler er i bruk? Hvordan brukes de? Hvilken innvirkning har bruken på de samtalene og aktivitetene som finner sted i klasserommet? Slike typer observasjoner tidfestes i den skjematiske delen av observasjonsskjemaet. I den strukturerte delen kodes observasjonene ved hjelp av forhåndsdefinerte kategorier. Disse kategoriene er knyttet til undervisningsaktiviteter, organisering og bruk av læremidler. Kategoriene: klassesamtale, gruppearbeid, individuelt arbeid, muntlige presentasjoner, høytlesning og lærerforelesning er forankret i en gjennomgang av tidligere studier av norske klasserom (Haug, 2011; Klette, 1998)

I tillegg har skjemaet plass for et etnografisk feltnotat der observatøren gjør deskriptive beskrivelser av de aktivitetene som foregår. Denne delen av observasjonsskjemaet gir forskerne bedre anledning til å beskrive særtrekk ved den læremiddelkulturen de observerer, trekk som er vanskelige å klassifisere med de forhåndsdefinerte kategoriene.

Det er utarbeidet to intervjuguider i prosjektet. Intervjuguiden til intervjuet med læreren er formell og inneholder spørsmål knyttet til lærerens forberedelser og valg av læremidler, kompetansemål og utfordringer ved vurdering. I tillegg inneholder intervjuguiden mer generelle spørsmål som retter seg mot lærerens generelle forståelse av læremidler og praksis i ulike fag.

Elevintervjuene er primært orientert mot elevenes opplevelse av undervisningsforløpet som er studert. Her spør vi om ulike utfordringer de måtte håndtere i bruk av de ulike læremidlene, og om hvordan ulike læremidler skapte motivasjon og engasjement. Fordi elevintervjuene ble gjort til slutt i feltarbeidet, fikk vi anledning til å ta utgangspunkt i konkrete episoder, noe som er en fordel når man intervjuer barn og unge. Til forskjell fra observasjon og videodata gir intervjuer innsikt i hendelser i løpet av prosjektet sett fra et subjektivt ståsted. Svarene gir samtidig informasjon om informantens verdier, valg og begrunnelser.

Pre- og posttest blir brukt for å kartlegge elevenes eksisterende kunnskap samt å undersøke elevenes læringsutbytte av et planlagt undervisningsopplegg med spesifikke læremidler.

Vedlagt følger her:

- Guide til bruk av observasjonsskjema og observasjonsnotat
- Koding av observasjonsdata
- Intervjuguide for lærere
- Intervjuguide for elever

Beskrivelse av pre- og posttest blir gitt i hver enkelt caserapport.

Vedlegg 1b: Guide til bruk av observasjonsskjema og observasjonsnotat

Forklaring av observasjonskategoriene i skjemaet

Monologisk. Læreren holder ordet alene over noe tid (eksempelvis ved å forklare noe, fortelle eller forelese).

Dialogisk. Fellessamtale mellom læreren og elevene (læreren fungerer som ordstyrer eller initierer samtaler der flere elever deltar, elever stiller spørsmål/bidrar med synspunkter).

Læremidler. Kategorien omfatter alle læringsressurser og læremidler som brukes (se ovenfor). De systematiske feltnotatene skal beskrive hvordan disse har betydning for aktivitetene og samtalene i klasserommet.

Dette skal det legges vekt på ved etnografisk feltnotat (siste del av skjemaet, bruk egen feltbok):

- *Beskriv undervisningen deskriptivt*, på en utfyllende måte og gjerne med eksempler og små utdrag fra samtaler. *Ikke* skriv hvordan du synes den burde være.

- *Beskriv alle læremidlene som er i bruk*, hvordan de blir brukt og hvordan de ulike aktivitetene foregår gjennom timen der forskjellige læremidler og ressurser blir brukt.

- *Beskriv hvordan eleven jobber*, eksemplifiser med detaljerte beskrivelser av en eller to tilfeldig valgte elever.
- *Beskriv hvordan læreren rammer inn timen.* Hvor eksplisitt beskriver læreren hva som er formålet med aktivitetene/oppgavene i den observerte økten? Hvordan formidles målet med undervisningsøkten og kravene til aktivitetene? (Gir læreren spesifikke krav knyttet til karakterer? Dette gjelder ikke mellomtrinnet.)

- *Strategiinstruksjon.* Gir læreren beskrivelser til elevene om hvordan de skal utvikle egen bevissthet om framgang og arbeidsmåter, for eksempel strategier for lesing, regning, problemløsning, informasjonsinnhenting og samarbeid? Kobler læreren denne strategiinstruksjonen til særtrekk ved læremidlene?

- *Forklaring av ord.* Blir fagbegreper og/eller lavfrekvente ord forklart for elevene?

Beskriv i tillegg generelt hva som preget timen du observerte. Var det mye lærerstyring, elevdeltagelse, elevmedbestemmelse, individuelt arbeid, undersøkelser og samarbeid mellom elever, diskusjoner/drøftinger/problematiseringer (mellom elevene / hele klassen), oppsummeringer/ henvisinger til tidligere aktiviteter, læreren jobber med enkeltelever? Beskriv også generelt om det var mye støy, og om hvordan læreren ga tilbakemeldinger (sosialt og emosjonelt støttende, generelle og faglige og irettesettelser av enkeltelever).

Alle feltnotater skal skrives til elektroniske dokumenter samme dag som observasjonen fant sted. Bruk denne fasen av arbeidet til å tenke gjennom observasjonene, og skriv gjerne en egen refleksjon som skilles ut fra observasjonsskjemaet og det etnografiske, deskriptive, feltnotatet.

Koding av observasjonsdata

Koding av observasjonsdata skal gjøres ved å registrere tid (antall minutter) som er brukt til følgende aktiviteter: a) klassesamtale, b) gruppearbeid, c) individuelt arbeid, d) muntlige presentasjoner, e) høytlesning og f) lærerforelesning. Disse framstår visuelt som kakediagram i caserapportene, og vil gjøre det enkelt å sammenligne undervisningsformene på tvers av de tolv casene.

Videodataene brukes til å kunne gi et mer nyansert innblikk i praksisen som utspiller seg innen de ulike aktivitetene. Det bør velges ut spesifikke aktivitetssekvenser for å eksemplifisere typiske former for læremiddelbruk knyttet til ulike interaksjonsformer. Disse sekvensene blir så transkribert og analysert i detalj i caserapportene. Sekvensene bør primært være fra videodata, men kan også bli dokumentert i form av feltnotater som i detalj beskriver enkelte episoder.

Utover at disse ekstraktene skal vise typiske former for læremiddelbruk, er det viktig å få fram episoder som inneholder forklaringer, rettferdiggjøringer, utfordringer og presiseringer. Ved å fokusere på slike redegjørelser rettes den analytiske oppmerksomheten mot det deltagerne i den sosiale samhandlingen er opptatt av, det de ser på som relevant i den aktuelle læringssituasjonen. Observasjonsdataene blir også brukt for å gi en mer utfyllende beskrivelse av det som foregår i klasserommet.

Observasjonsskjema og notat

Informasjon

Navn på forsker/student som har gjennomført observasjonenes:

____

Skole: ______________________________

Lærer m/k: ______ Fag E/S/M/N[12]: ______ Klassetrinn: ______________

Antall elever: Gutter: ______ Jenter: ______

Observasjonsdato: ________ Timen/enhet starter: ________ Timen/enhet slutter: ________

Tok du kopi/bilde av elevenes eller lærerens undervisningsmateriale? Ja: ______ Nei______

Beskriv undervisningsmateriale:

____

____

Beskrivelse av fagtema/prosjekt:

____

____

[12] **E** – engelsk **S**-samfunnsfag **M**-matematikk **N**-Naturfag

Observasjonsskjema: Arbeidsformer og læremidler

Elevaktiviteter:

Elevarbeidsformer	**Tidsangivelse**	**Læremidler og ressurser i bruk:** Lærebøker, Internett, digitale læremidler, Smartboard, Tavle, Power Point m.m	**Notater**
Gruppearbeid			
Individuelt arbeid			
Muntlige presentasjoner			
Stasjoner, rollespill, andre aktiviteter			

Læreraktivitet:

Læreraktivitet	**Tidsangivelse**	**Læremidler i bruk:** Tavle, Smartboard, Power Point m.m	**Notater**
Faglig plenumsforelesIning (Monologisk)			
Klassediskusjon (Dialogisk)			
Individuell veiledning			
Gruppeveiledning			
Annet:			

Observasjonsnotat (føres i egen feltnotatbok)

Vedlegg 1c: Intervjuguide

Intervjuene gjennomføres med lærer som deltar. Tid: 30-40 min.

Lærer:

Om lærerens bakgrunn:

1. Hva er din bakgrunn og hvor lenge har du jobbet som lærer?

2. Hvordan anser du din egen undervisning? (Tradisjonell, innovativ)

3. I hvilken grad og hvordan har du brukt digitale læremidler tidligere?

Elevenes overgang mellom 10. trinn og 1 vgs

4. Hvordan vil du beskrive overgangen mellom trinnene 10 og 1T for elevene?

5. Hva er de mest sentrale faglige utfordringene som elevene møter i overgangen?

6. Hvordan skiller timene i Matte 1T seg i september fra de i , la oss si, februar?

7. Er det noen forskjeller mellom ulike elevgrupper?

8. Vet du om noen av elevene benyttet seg av leksehjelp?

9. Når det gjelder læremidler; hvilke læremidler har de mye erfaring med og lite erfaring med?

Om prosjektet som observeres

10. Hvordan organiserer du elevene vanligvis når de skal jobbe med matematikk?

11. Hvordan følger du vanligvis opp enkeltelever og hele klassen når de står fast?

12. Hvilke type læremidler bruker du vanligvis i matematikk 1T?

13. I hvilken grad syns du læreboka dekker det elevene skal lære om algebra i 1T?

14. I hvilken grad syns du Graph/ Geogebra støtter opp om læringsmålene om algebra?

15. Hvordan syntes du forholdet mellom lærebok og Graph/Geogebra fungerte?

Elever:

Overgang mellom trinn 10 og 1 vgs.

1. Opplever dere at det en forskjell mellom 10. trinn og 1 vgs?

2. Hvis ja - hva består disse forskjellene av?

   - Øker kravene til dere faglig?

3. Brukte dere digitale læremidler på ungdomstrinnet?

   - Hvilke typer og til hva ? Gi eksempler.
   - Hva med lærebøker og kladdebøker?

4. Bruker dere digitale læremidler i 1 vgs.?

   - Hvilke typer og til hva? Gi eksempler.
   - Hva med lærebøker og kladdebøker?

Om prosjektet som observeres

5. Hva syns dere om matematikk?

   - Feks. sammenliknet med andre fag som naturfag, norsk og gym

6. Hvordan var det å jobbe med matematikk i denne perioden?

   - Var det annerledes enn slik dere jobbet på ungdomstrinnet?
   - Benyttet dere leksehjelp på ettermiddagen?
   - Hvis ikke - vil dere benytte det framtiden?

7. Hva syns dere om algebra?

8. Hvilke oppgaver i testen syntes dere var lett, vanskelig etc. (vise de test items)?

9. Resonneringsspørsmål

10. Hva syns dere om Graph/Geogebra?

11. Hva bidro mest til det dere presterte på testen?

    - Lærer, Tavla, Lærebok, Graph/Geogebra

12. På hvilken måte lærer du vanligvis best?

    - Hvordan skal læreren legge opp undervisninga for å få dette til?

13. På hvordan måten lærer du algebra best?

    - Hvorfor er algebra lett eller vanskelig?

Referanser til vedlegg 1

Bachmann, K. E. (2005). *Læreplanens differens: formidling av læreplanen til skolepraksis*. Trondheim: NTNU.

Cole, M. (1996). *Cultural psychology: A once and future discipline*. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring*. Oslo: Abstrakt forl.

Egeberg, G., Gudmundsdottir, G. B., Hatlevik, O. E., Ottestad, G., Skaug, J. H., & Tømte, K. (2012). Monitor 2011. Skolens digitale tilstand [The digital state of affairs in Norwegian schools.] Oslo: The Norwegian centre for ICT in Education.

Gee, J. P., & Green, J. L. (1998). Discourse Analysis, Learning, and Social Practice: A Methodological Study. *Review of Educational Research, 23 (1998),* 119-169.

Gilje, Ø. (2008a). Digital medieproduksjon i nettverksklasserommet. In S. Østerud & E. G. Skogseth (Eds.), *Å være på nett - Kommunikasjon, identitets- og kompetanseutvikling med digitale medier* (pp. 60-79). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Gilje, Ø. (2008b). Googling Movies - Digital Media Production and the "Culture of Appropriation". *Informal Learning and Digital Media: Constructions, Contexts and Consequences. Cambridge: Cambridge Scholar Publishing*.

Hatlevik, O. E. (2011). *Monitor 2010: samtaler om IKT i skolen*. [Tromsø]: Senter for IKT i utdanningen.

Haug, P. (2011). Klasseromsforskning - Kunnskapsstatus og konsekvensar for lærarrolla og lærarutdanninga. Rapport 21. Volda: Høgskulen i Volda.

Hodge, B., & Kress, G. (1988). *Social Semiotics*. Cambridge: Polity Press.

Juuhl, G. K., Hontvedt, M., & Skjelbred, D. (2010). Læremiddelforsking etter LK06 : eit kunnskapsoversyn: Høgskolen i Vestfold (rapport 1/2010).

Klette, K. (1998). *Klasseromsforskning - på norsk*. Oslo: Ad Notam Gyldendal.

Knudsen, S. V. (Ed.). (2011). *Internasjonal forskning på læremidler : en kunnskapsstatus* Høgskolen i Vestfold.

Kress, G. (2010). *Multimodality - A social semiotic approach to contemporary communication*. London/New York: Routledge.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Rasmussen, I. (2012). Trajectories of participation: temporality and learning. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Science of Learning* (pp. 3334-3337): Springer.

Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford: Oxford University Press.

Rønning, W., Fiva, T., Henriksen, E., Krogtoft, M., Nilsen, N. O., Skogvold, A. S., & Solstad, A. G. (2008). Læreplan, læreverk og tilrettelegging for læring - Analyse av læreplan og et utvalg læreverk i naturfag, norsk og samfunnsfag. Bodø: Nordlandsforskning (NF-rapport nr 2/2008).

Selander, S., & Kress, G. (2010). *Design för lärande: ett multimodalt perspektiv*. Stockholm: Norstedts.

Skjelbred, D., Solstad, T., & Aamotsbakken, B. (2005). Kartlegging av læremidler og Læremiddelpraksis. Tønsberg: Høgskolen i Vestfold.

Utdanningsdirektoratet. (2005). Kartlegging av læremiddel og læremiddelpraksis. København: Rambøll Management AS.

Vedlegg 2: Case-spesifikke oppgaver, læremidler og dokumentasjon

Vedlegg 2a: Pretest

Matematikkprøve 1T XXXX vgs. i tall, algebra og likninger

Fornavn: ________________________ Etternavn: ___________________________

1. Regn ut: 3 + 4 • 2

2. Regn ut: $(3^2 - 3) + 4$

3. Regn ut og forkort (hvis det er mulig): $\frac{4}{12} + \frac{3}{9}$

4. Skriv følgende uttrykk så enkelt som mulig: $x + \frac{x}{1} + \frac{4x}{2}$

5. Trekk en pil fra hvert uttrykk på venstresiden til det eller de uttrykkene på høyre side som du mener er de samme.

	$b^2+2bc+c^2$
$(b+c)^2$	b^2-c^2
$(b-c)^2$	$b^2-2bc+c^2$
$(b+c)(b-c)$	b^2+c^2
	$2b^2$

6. a) Hvor mange ledd har uttrykket: 4x + 8 + 4 • y

b) Hvis mulig, faktoriser uttrykket: 4x + 8 + 4 • y

7. Er uttrykket under et fullstendig kvadrat? Vis utregning/forklar.

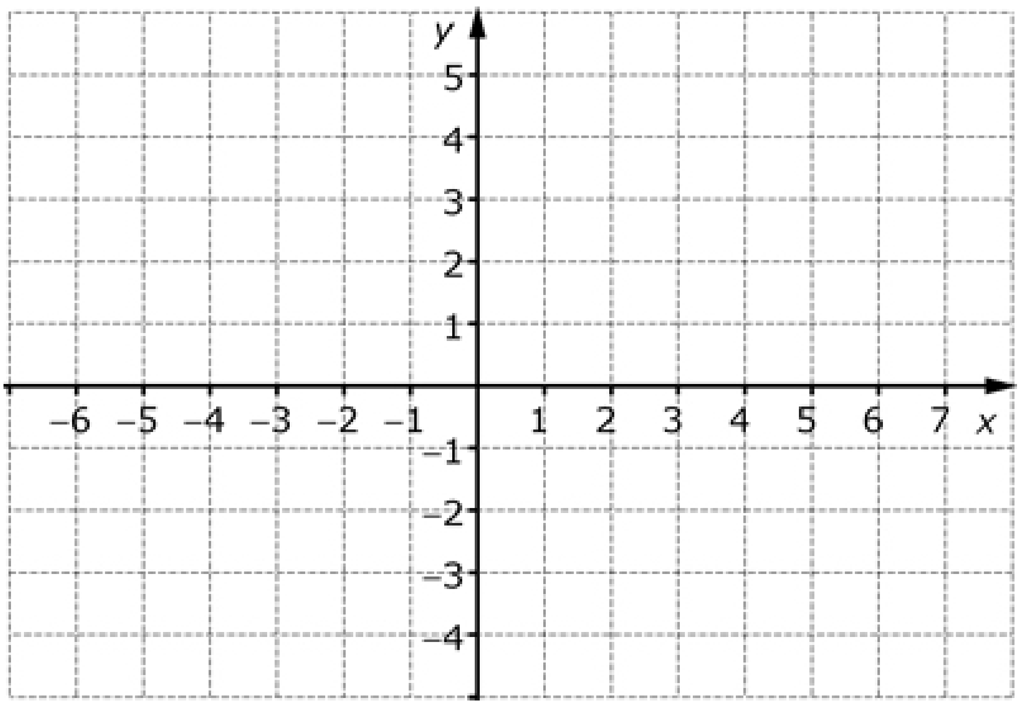
$x^2 + 4x + 6$

8. Finn verdien av x i likningen under. Vis utregning.

4x + 2 = 2x + 6

9. Kari har betalt x kroner for 8 flasker brus. Hvor mye koster 4 flasker? Vis fremgangsmåte.

10. Tegn grafen til den rette linjen y=2x+1 i koordinatsystemet under



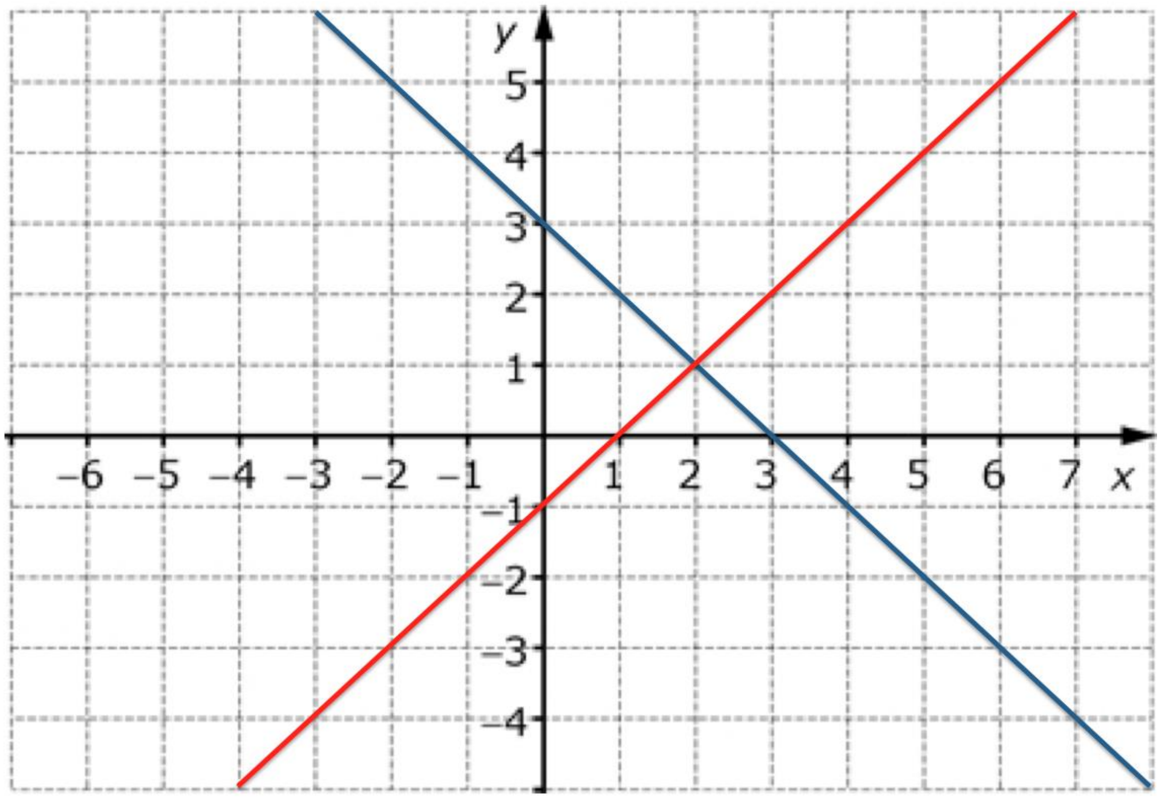
11. a) Finn verdien av y når x = 3

x	0	1	2	3
y	2	3	4	

b) Hva er formelen for den rette linja (likningen) i oppgave 11 a)?

12. I grafen under ser du to rette linjer.

a) Løs likningene grafisk ved å finne verdien for x og y der linjene krysser hverandre



b) Lag et likningssett ved å finne en formel (uttrykk) for hver av de to rette linjene i grafen i oppgave 12a.

Vedlegg 2b: Posttest

Matematikkprøve 1T XXXX vgs. i tall, algebra og likninger

Fornavn: ________________________ Etternavn: ______________________________

1. Regn ut: 4 + 3 • 2

2. Regn ut: $(3^2 - 4) + 3$

3. Regn ut og forkort (hvis det er mulig): $\frac{5}{15} + \frac{2}{6}$

4. Skriv følgende uttrykk så enkelt som mulig: $x + \frac{x}{1} + \frac{3x}{3}$

5. Trekk en pil fra hvert uttrykk på venstresiden til det eller de uttrykkene på høyre side som du mener er de samme.

	b^2-c^2
$(b+c)^2$	$b^2+2bc+c^2$
$(b-c)^2$	$b^2-2bc+c^2$
$(b+c)(b-c)$	$2b^2$
	b^2+c^2

6. a) Hvor mange ledd har uttrykket: 3x + 6 + 3 • y

b) Hvis mulig, faktoriser uttrykket: 3x + 6 + 3 • y

7. Er uttrykket under et fullstendig kvadrat (vis utregning/forklar)?

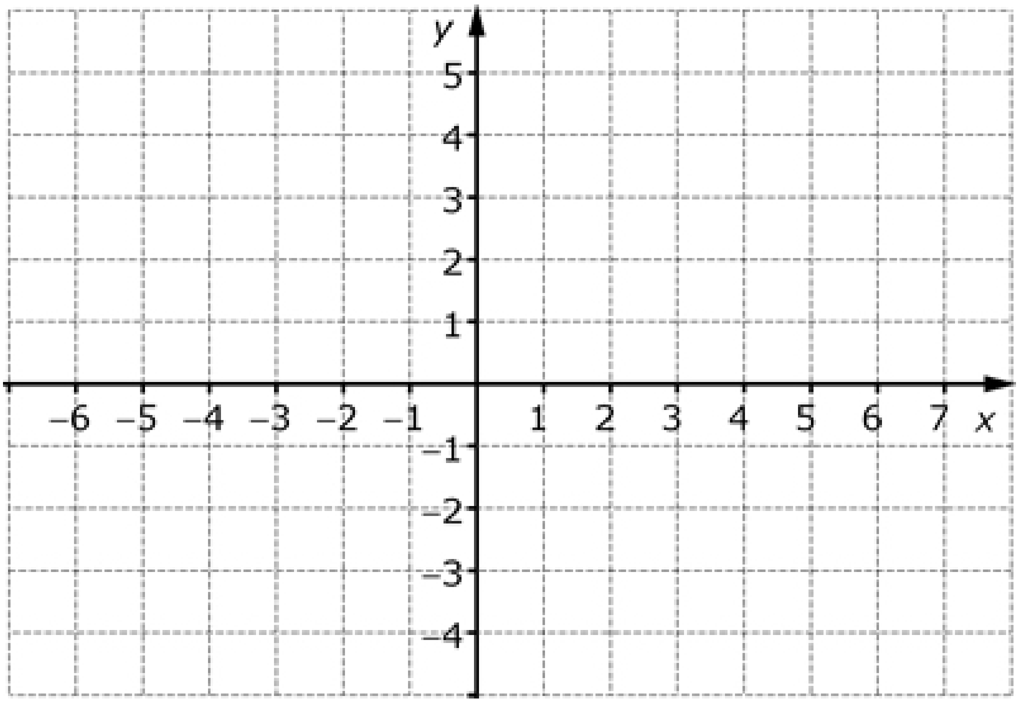
$x^2 + 4x + 4$

8. Finn verdien av x i likningen under (vis utregning):

$4x + 4 = 2x + 8$

9. Kari har betalt x kroner for seks flasker brus. Hvor mye koster 2 flasker? (Vis fremgangsmåte)

10. Tegn grafen til den rette linjen y=2x+1 i koordinatsystemet under



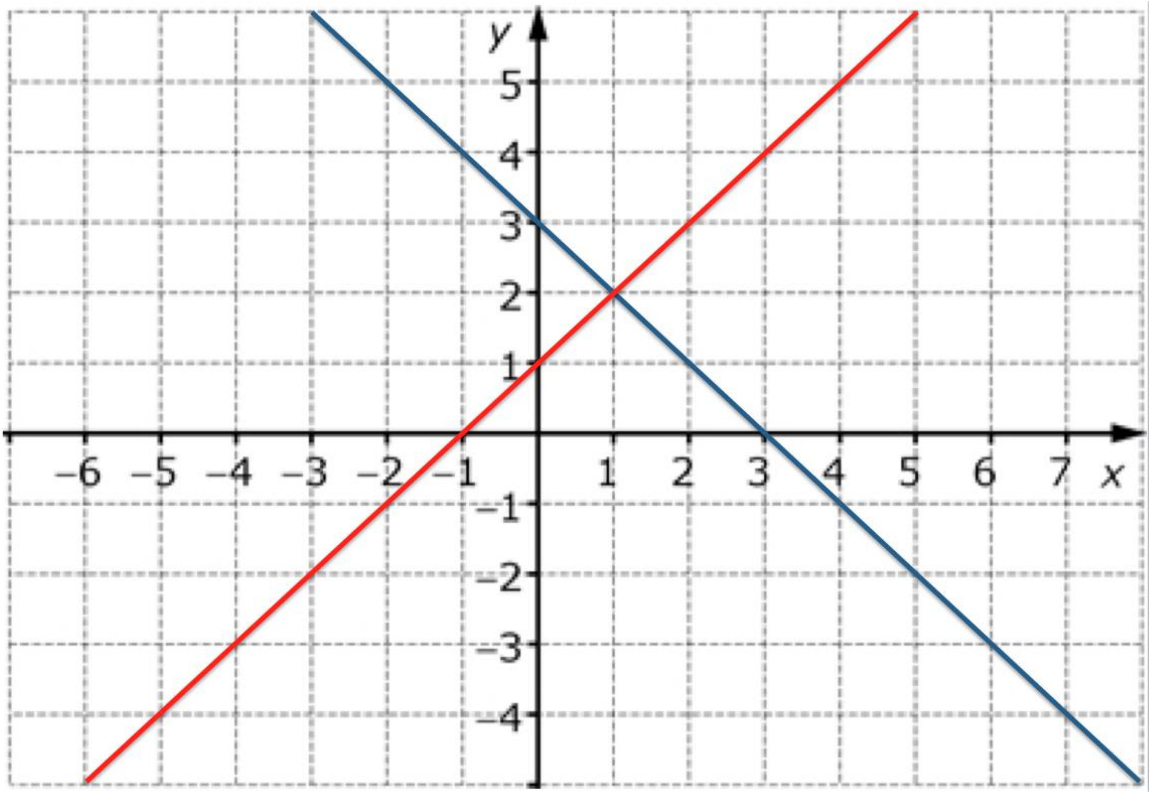
11. a) Finn verdien av y når x = 3

x	0	1	2	3
y	3	4	5	

b) Hva er formelen for den rette linja (likningen) i oppgave 11 a)?

12. I grafen under ser du to rette linjer.

a) Løs likningene grafisk ved å finne verdien for x og y der linjene krysser hverandre



b) Lag et likningssett ved å finne en formel (uttrykk) for hver av de to rette linjene i grafen i oppgave 12a.

Vedlegg 2c: Elevenes arbeidsformer og bruk av læringsressurser

Elever:

Læringsressurser: **A**: Lærebøker **B**: Internett **C**: Digitale læremidler **D**: Smart Board **E**: Tavle **F**: PowerPoint **G**: Kladdebok H: Kladdeark I: Graph K: Projector

Elevarbeidsformer: **1**:Gruppe **2**:Individuelt **3**:Muntlige presentasjoner **4**:Stasjoner, rollespill, andre akt **5**:Lytting **6**:Ikke faglig **7:** Plenum dialog

Tid (min.)	Elevarbeidsform	Læringsressurser
46	2	A, G
40	5	
39	2	E, G
34	1	A, G, I
24	1	H
23	6	
23	7	E
22	7	A, G, I
21	2	E, H
17	2	A, G, I
15	2	D, I
15	7	E
15	7	E, I, K
13	7	E, D, I
12	7	A, D, E, I
10	7	A,E
8	7	A, G, E
7	7	
6	5	I, K
5	2	I
5	5	E
5	5	D
5	5	E, D, I
4	2	B, D
3	1	I
3	5	H
3	7	I
2	2	G
2	2	E, D, I
1	7	K

Elevarbeidsform	Tid (min.)	Læringsressurser
1	34	A, G, I
1	24	H
1	3	I
2	46	A, G
2	39	E, G
2	21	E, H
2	17	A, G, I
2	15	D, I
2	5	I
2	4	B, D
2	2	G
2	2	E, D, I
5	40	
5	6	I, K
5	5	E
5	5	D
5	5	E, D, I
5	3	H
6	23	
7	23	E
7	22	A, G, I
7	15	E
7	15	E, I, K
7	13	E, D, I
7	12	A, D, E, I
7	10	A,E
7	8	A, G, E
7	7	
7	3	I
7	1	K

Oppsummering sortert etter hhv. tid i minutter (til venstre) og arbeidsform (til høyre)

Vedlegg 2d: Lærerens arbeidsformer og bruk av læringsressurser

Lærer:

Former: **1**: Plenumsforelesning (Monologisk) **2**: Klassediskusjon (Dialogisk) **3**: Individuell veiledning **4**: Gruppeveiledning **5**: Annet

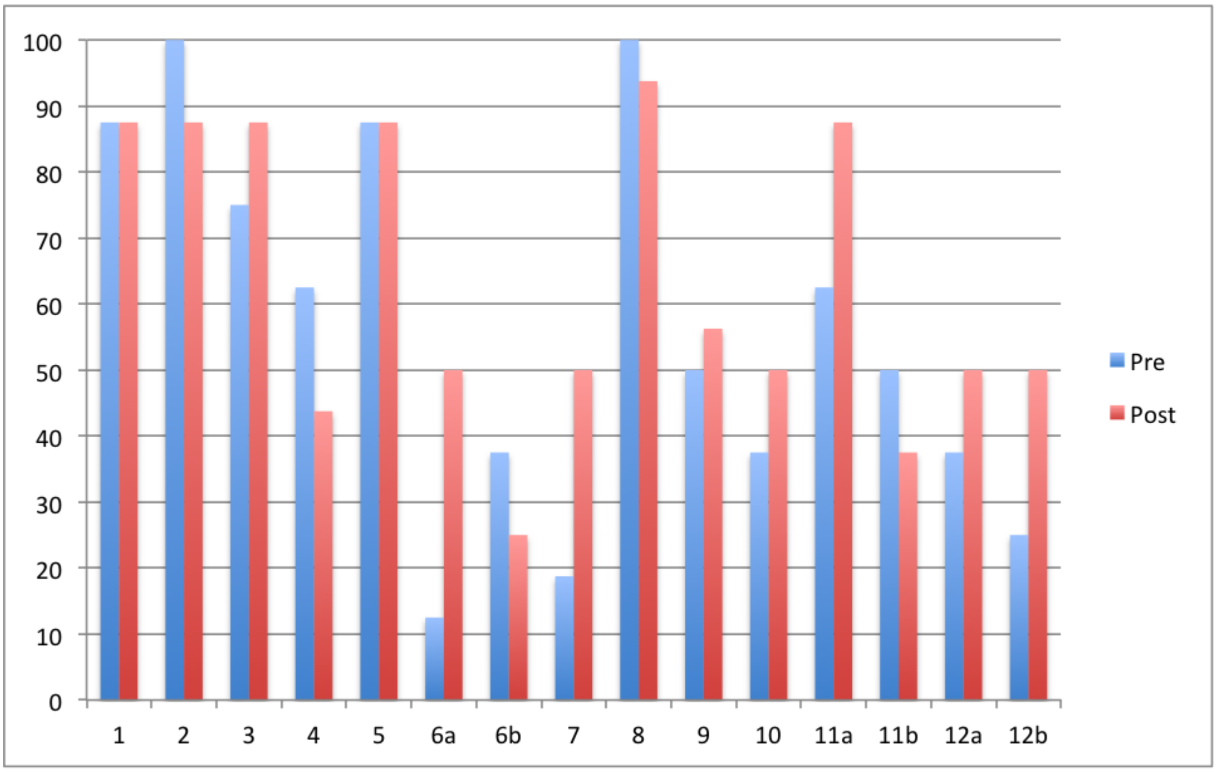
Læringsressurser: **A**: Lærebøker **B**: Internett **C**: Digitale læremidler **D**: Smartboard **E**: Tavle **F**: Powerpoint **G**: Kladdebok H: Kladdeark i: Projector J: Graph/GeoGebra

Tid (min.)	Form	Læringsressurser		Form	Tid (min.)	Læringsressurser
44	4	A, G		1	14	A,E
43	5			1	13	
37	2	E		1	10	A
27	3	A, G		1	7	I, J
22	2	A,E		1	7	D, J
20	3	A		1	6	E
20	5	E		1	6	D
18	2	A, D, E, J		1	4	D, E, J
18	4	H		1	3	K
16	2	E, I, J		1	2	A, D, J
15	3	A, J		2	37	E
14	1	A,E		2	22	A,E
13	1			2	18	A, D, E, J
13	2	D, E, J		2	16	E, I, J
13	5	D		2	13	D, E, J
11	4	A, I		2	8	A
10	1	A		2	8	
9	4	A, J		2	4	A, D, J
8	2	A		2	2	I, J
8	2			2	1	D, J
7	1	I, J		3	27	A, G
7	1	D, J		3	20	A
6	1	E		3	15	A, J
6	1	D		3	5	E
5	3	E		4	44	A, G
4	1	D, E, J		4	18	H
4	2	A, D, J		4	11	A, I
3	1	J		4	9	A, J
3	4	A,E		4	3	A,E
2	1	A, D, J		5	43	
2	2	I, J		5	20	E
2	5	D, J		5	13	D
2	5	A		5	2	D, J
1	2	D, J		5	2	A
1	5	H		5	1	H

Oppsummering sortert etter hhv. tid i minutter (til venstre) og arbeidsform (til høyre)

Vedlegg 2e: Resultater fra pre- og posttest

Figur 1 viser prosentvise forskjeller i resultater mellom pre- og posttest.



Figur 1 Prosentvis score (y-akse) på pre- og posttest per spørsmål (x-akse). Spørsmål 1-7 er rettet mot kapittel 2 mens 8-12b er rettet mot kapittel 3

Paret to halet t-test for elevene som deltok på både pre- og posttestene, viste ikke noen signifikant forskjell mellom gjennomsnitt av pretestresultater (M = 12,75, SD = 4,06) og posttestresultater (M = 14,13, SD = 5,03); $t(7) = -1{,}59$; $p > {,}05$. To halet t-test ble valgt fordi endringer i prestasjon i visse tilfeller kan bety at elevene presterer bedre på pretest enn på posttest. Som figuren over viser, presterer elevene bedre på pretest enn på posttest i 5 av 15 spørsmål mens de presterte bedre på posttest i 8 av 15 spørsmål. I tillegg til at det ikke fantes signifikant endring fra pre- til posttest deltok kun 8 av 21 elever på både pre- og posttest. Disse 8 elevene utgjør kun 38 % av alle elevene som deltok i prosjektet. Det betyr at pre- og postresultatene i tillegg har lav gyldighet som mål på prestasjon for klassen som helhet. Uten signifikant endring fra pre- til posttest og lav gyldighet med hensyn til deltakelse har vi heller ikke valgt å regne ut effektstørrelser ved bruk av *Cohen's d* for klassen som helhet.

Vedlegg 2f: Prøve i kapittel 2

Oppgave 1:

4(3-1) + 7(-2) - 3(2-4)

Oppgave 2:

b(a-3b)+(a+b)(a-b)-ab

Oppgave 3:

$$\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x+1}}{\frac{5}{x+1}}$$

Oppgave 4: Forkort brøken

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 + 2x}$$

Oppgave 5: Faktoriser

$100 - 81a^2b^4$