Matematikk i motvind

TIMSS Advanced 2008 i videregående skole

Liv Sissel Grønmo, Torgeir Onstad & Ida Friestad Pedersen

Unipub 2010

ISBN 978-82-7477-479-7

Henvendelser om denne boka rettes til:
T: 22 85 33 00
F: 22 85 30 39
E-post: post@unipub.no
www.unipub.no

Omslagsdesign og sats: Unipub
Trykk og innbinding: 07 Gruppen

Forord

Denne boka presenterer og analyserer forskningsresultater fra TIMSS Advanced 2008 i matematikk.

TIMSS Advanced er, som andre TIMSS-undersøkelser i grunnskolen, gjennomført i regi av organisasjonen IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Studien ledes av forskere ved Boston College i USA, mens sekretariatet for IEA ligger i Amsterdam i Nederland.

TIMSS-gruppa ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) på Universitetet i Oslo tok i 2005 et initiativ overfor ledelsen i IEA med sikte på en studie av elever i slutten av videregående skole. Formålet var å se på utviklingen over tid ved å sammenlikne med resultatene fra en tilsvarende internasjonal undersøkelse fra 1995. Norge deltok den gangen bare i fysikk, men gjennomførte matematikkstudien i 1998, med de samme oppgavene og spørreskjemaene som ble brukt internasjonalt i 1995. Initiativet fra ILS ble støttet av Utdanningsdirektoratet ved Anne Berit Kavli, som er norsk representant i IEA General Assembly. Kunnskapsdepartementet har via Utdanningsdirektoratet finansiert den norske deltakelsen i studien; i tillegg har norske myndigheter gitt betydelig økonomisk støtte til internasjonal planlegging og gjennomføring.

Norsk prosjektleder er Liv Sissel Grønmo ved ILS. Hun har spesielt ansvar for matematikkdelen av studien. Svein Lie ved samme institusjon har hatt ansvar for fysikkdelen både nasjonalt og internasjonalt. Vår nærmeste samarbeidspartner i Utdanningsdirektoratet har vært Grethe Hovland. Denne boka presenterer forskningsresultater i matematikk. En egen bok som omhandler fysikkfaget ble utgitt tidligere i år (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

Målet for TIMSS Advanced er å undersøke «matematikkspesialister» og «fysikkspesialister» i det siste året på videregående skole. I Norge dreier det seg om elever som tok henholdsvis 3MX og 3FY. Studien kartlegger elevenes faglige kompetanse, deres syn på betydningen av faget, deres ønsker om videre studier, læreres og elevers oppfatninger av undervisningen, og lærernes utdanningsbakgrunn. Opplysninger om bakgrunnsvariabler for elevene, som alder, kjønn og hjemmebakgrunn, ble også samlet inn.

Den store datamengden dette genererer om matematikk i norsk skole, blir i denne boka analysert og drøftet fra mange ulike perspektiver. Over hvert kapittel er det oppgitt hvem som har hatt hovedansvaret for å skrive teksten. Samtidig har vi fungert som et team, med diskusjoner av innhold og med justeringer og forbedringer i hverandres kapitler. Torgeir Onstad har hatt et spesielt ansvar for språk og korrektur i boka, Ida Friestad Pedersen for kontroll av figurer og tabeller. Ann-Britt Haavik og Ole Magnus Skretting har utarbeidet figurer, tabeller og referanselister. Sammen med Anubha Rohatgi har de også hatt et stort ansvar for ferdigstilling av oppgavehefter og spørreskjemaer.

Kompetansen i matematikk er målt ved hjelp av faglige tester, mens faktorer som hjemmebakgrunn, oppfatninger og trekk ved undervisningen er kartlagt ved hjelp av spørreskjemaer til elever, lærere og skoleledere. Nesten halvparten av oppgavene i TIMSS Advanced 2008 er oppgaver fra den forrige studien som ikke har blitt offentliggjort. Disse gjør det mulig å måle utviklingen over tid. Den andre halvparten er nye oppgaver. Den norske matematikkgruppa i TIMSS Advanced har spilt en sentral rolle internasjonalt i utviklingen av rammeverk og oppgaver for studien.

En markant tilbakegang i de norske elevenes faglige prestasjoner i matematikk har ført til at boka har fått tittelen *Matematikk i motvind*. I boka diskuterer vi grundig bakgrunn for og mulige årsaker til tilbakegangen. Vi belyser også andre sider ved norsk matematikkundervisning, både gjennom sammenlikninger med andre land og ved flernivåanalyser av de norske dataene. Det gjelder faktorer som undervisningsmetoder, bruk av kalkulator, bruk av lekser, lærernes utdanning og elevenes hjemmebakgrunn. Gjennom hele boka er det lagt vekt på å trekke tråder til tidligere studier av elever i matematikk i grunnskolen med sikte på å kunne gi et mest mulig samlet bilde av norsk matematikkundervisning. Resultatene settes inn i et fagdidaktisk og skolepolitisk perspektiv.

Manuskriptet har blitt fagfellevurdert av mange personer med relevant kompetanse. Vi har fått uttalelser fra en matematikkdidaktiker og en erfaren matematikklektor. Utdanningsdirektoratet har hentet inn kommentarer fra en spesialist på kvantitative forskningsmetoder, og forlaget har brukt en

anonym fagkonsulent. Vi takker alle disse for nyttige bidrag i prosessen. Vi takker dessuten forlagets språkkonsulent. Vi har også hatt stor nytte av faglige drøftinger med internasjonale kolleger. En spesiell takk går til Harald Solbakken for hans innspill når det gjelder norsk læreplan, og til Jan Ommundsen for støtte i hans tid som leder av ILS. Vi takker Jan-Eric Gustafsson som har bidratt til analysene i kapittel 9. Til slutt takker vi alle elevene, lærerne og rektorene som deltok i undersøkelsen.

Oslo, juni 2010.
Forfatterne

Innhold

1 Hovedfunn og trender i TIMSS Advanced 2008

Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo

TIMSS Advanced er en internasjonal komparativ undersøkelse av matematikk- og fysikkspesialistene i det siste året på videregående skole. I Norge ble de definert som de elevene som tok henholdsvis 3MX og 3FY våren 2008. Studien er designet for å kunne sammenlikne resultater mellom land, og for å kunne måle utvikling over tid, såkalte trender. Norge deltok i den tilsvarende studien av fysikkspesialistene i TIMSS i 1995, men vi deltok ikke i matematikkstudien da. Isteden gjennomførte Norge studien av matematikkspesialistene med de samme oppgavene og spørreskjemaene i 1998.

Denne boka presenterer resultater for matematikkspesialistene. Resultater i fysikk er publisert i en egen bok (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

Kapittel 1 i denne boka presenterer hovedresultatene i matematikk, inkludert oversikter som viser trender i norske elevers prestasjoner fra 1998 til 2008. Noen resultater som viser karakteristiske trekk ved norsk matematikkundervisning blir også presentert. I de påfølgende kapitlene blir elevprestasjoner og undervisningsfaktorer lagt fram og diskutert. Kapittel 11 inneholder en oppsummering og drøfting av resultatene og setter dem inn i en bredere forskningsmessig og skolepolitisk kontekst.

Det er en klar tilbakegang i de norske elevenes matematikkprestasjoner fra 1998 til 2008. De norske 3MX-elevene presterer svakere enn elever i mange andre land. Unntaket er Sverige, som har en enda større tilbakegang i prestasjoner enn oss fra den forrige studien, og hvor gjennomsnittsskåren for prestasjoner ligger under den norske. Likheten mellom de norske og de svenske resultatene framstår ofte som slående i TIMSS Advanced.

Når det gjelder undervisning i matematikk, samsvarer analyser av norske data fra TIMSS Advanced-studien med tidligere analyser av data fra grunnskolen (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009). Både trening med sikte på å automatisere viktige ferdigheter og diskusjon og refleksjon rundt svar og løsningsmetoder blir mindre vektlagt i norsk skole enn i andre land. I Norge legges hovedvekten på individuelle arbeidsmåter – som at elevene arbeider med å løse oppgaver – mer ensidig enn i andre land. Dette kan være en mulig årsak til de generelt svake norske resultatene i matematikk på alle nivåer i skolen, og til den allmenne nedgangen i prestasjoner man har sett fra 1995 til 2008.

Først i dette kapittelet gis en kort og generell beskrivelse av TIMSS Advanced. En mer detaljert beskrivelse av rammer, metoder og gjennomføring av studien står i kapittel 12.

1.1 Kort om TIMSS Advanced

TIMSS står for *Trends in International Mathematics and Science Study*, mens *Advanced* henviser til at studien gjelder de elevene som velger full fordypning i matematikk eller fysikk i videregående skole. Det er en egen bok som presenterer resultatene i fysikk (Lie, Angell & Rohatgi, 2010), mens denne boka presenterer resultatene i matematikk.

Følgende 10 land deltok i studien i matematikk: Armenia, Filippinene, Iran, Italia, Libanon, Nederland, Norge, Russland, Slovenia og Sverige. I denne rapporten har vi valgt ut fire såkalte *referanseland* – nemlig Italia, Nederland, Slovenia og Sverige – som står spesielt sentralt i sammenlikninger og drøftinger av de norske resultatene. I siste del av dette kapittelet redegjøres det for valg av referanselandene. I noen sammenhenger tar vi også med resultater fra andre deltakerland enn referanselandene.

Dette er første gang man gjennomfører en internasjonal studie hvor man kan se på utviklingen over tid av elevers prestasjoner i matematikk i slutten av videregående skole. Trenddata er internasjonalt bare tilgjengelig for de landene som deltok både i 1995 og i 2008, nemlig Italia, Russland, Slovenia og Sverige. For Norge vil sammenlikningen i matematikk bli mellom den samme studien som ble gjennomført nasjonalt hos oss i 1998 og resultater fra TIMSS Advanced 2008.

TIMSS Advanced ledes av den internasjonale organisasjonen IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*), som ble etablert i 1959. IEA har også hatt ansvaret for alle TIMSS-studiene i grunnskolen. Det internasjonale prosjektsenteret for TIMSS Advanced ligger ved Boston College i USA, mens IEAs sekretariat ligger i Amsterdam. IEA Data Processing and Research Center i Hamburg tilrettelegger og behandler data fra deltakerlandene. Statistics Canada i Ottawa har oppgaver knyttet til utvalg og utvalgsprosedyrer. I Norge er det Utdanningsdirektoratet som på vegne av Kunnskapsdepartementet har ansvaret for at Norge deltar i studien. De har delegert ansvaret for gjennomføringen av og forskning knyttet til studien til Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo med Liv Sissel Grønmo som nasjonal prosjektleder.

Norske myndigheter ved Kunnskapsdepartementet og Utdanningsdirektoratet har gitt betydelig økonomisk støtte til den internasjonale planleggingen og gjennomføringen av studien. Utdanningsdirektoratet er representert i *General Assembly* i IEA. Den internasjonale lanseringen av resultatene fra TIMSS Advanced skjedde i Oslo i regi av IEA, Boston College, ILS og Utdanningsdirektoratet 9. desember 2009.

Det er jevnlig avholdt internasjonale møter for alle deltakerlandene underveis i prosjektet. På disse møtene er rammeverket for undersøkelsen utviklet, oppgaver og spørreskjemaer gjennomgått, og innholdet i den internasjonale rapporten fra studien presentert og drøftet. Internasjonale ekspertkomiteer har hatt ansvar for utviklingen av oppgavene og spørreskjemaene. Norge har hatt en sentral rolle i disse ekspertkomiteene både i matematikk og i fysikk (se kapittel 12).

Kort oppsummert er målene for TIMSS Advanced å

- undersøke kunnskapene til elever som tar full fordypning i matematikk (eller fysikk) på siste trinn i videregående skole
- studere hvordan disse elevenes prestasjoner henger sammen med ulike faktorer som kjønn, faglig selvtillit og holdninger
- undersøke lærernes bakgrunn og tilretteleggingen av undervisningen
- sammenlike prestasjoner og bakgrunnsfaktorer mellom land
- studere utvikling over tid (trendstudier)
- prøve å identifisere faktorer, nasjonalt og internasjonalt, som fremmer god læring og en positiv utvikling innen matematikk (og fysikk) i skolen

For mer om internasjonale komparative studier i matematikk henvises det til tidligere publikasjoner fra TIMSS og PISA, se www.timss.no og www.pisa.no. På disse sidene ligger alle frigitte oppgaver fra studiene, samt nasjonale rapporter og ulike artikler basert på data fra studiene. Her ligger også lenker til nettsider med internasjonale publikasjoner. På http://udir.no/Tema/Forskning/Internasjonale-studier/ er også resultatene oppsummert på norsk og engelsk.

En viktig side ved alle TIMSS-studiene, både i grunnskolen og i den videregående skolen, er å gi gode trenddata for de enkelte deltakerlandene. Dette perspektivet står sentralt i denne boka når det gjelder utviklingen av elevenes prestasjoner. Det blir også jevnlig referert til resultater fra tidligere studier av matematikk i grunnskolen, som TIMSS 1995, 2003 og 2007. For mer om populasjoner, utvalg og gjennomføring av studien i 2008 viser vi til kapittel 12. Her nøyer vi oss med å fastslå at TIMSS Advanced – i likhet med de andre TIMSS-studiene – er planlagt og ledet av topp internasjonal ekspertise på moderne testteori. Slike studier undersøker ikke alt som er viktig i skolen, men det de undersøker, blir behandlet med solide metoder og høy kompetanse.

1.2 Prestasjoner i matematikk

1.2.1 Matematikkprestasjoner i TIMSS Advanced 2008

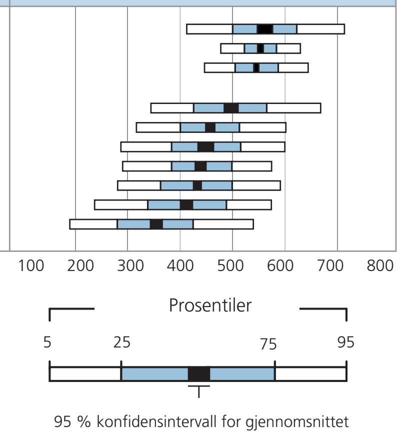
Figur 1.1 viser hovedresultatene for matematikkspesialistene i de deltakende landene i TIMSS Advanced 2008. Kolonnene i figuren viser populasjonens størrelse i prosent av årskullet, elevenes gjennomsnittsalder, antall år på skolen og gjennomsnittlige elevprestasjoner angitt i poengskår for hvert enkelt land. I den høyre kolonnen illustreres spredningen for hvert land. Ytterligere forklaringer til mål og skalaer i figuren er gitt i tekstboks 1.1 og i kapittel 12.

Tekstboks 1.1 Forklaring til figur 1.1.

For å kunne gjøre studier som viser utvikling over tid (trendstudier), trenger man en fast skala å relatere resultatene til. I alle TIMSS-studier beholdes mange oppgaver uendret fra undersøkelse til undersøkelse. Ved hjelp av disse er det mulig å konstruere en slik fast skala. I TIMSS-studiene har man valgt å bruke de internasjonale resultatene fra 1995 som basis for den faste skalaen som brukes til å måle prestasjoner. Det internasjonale gjennomsnittet fra 1995 har blitt standardisert til 500 med et standardavvik på 100. Senere studier bruker denne standardiserte skalaen for å beregne landenes gjennomsnittlige skår. I figur 1.1 er gjennomsnittet gitt som et tresifret tall i kolonnen med overskriften «Skår». Lengst til høyre i figuren er fordelingen av elevenes skår vist i form av et diagram som angir 5-, 25-, 75- og 95-prosentilene. I tillegg vises midt i diagrammet et 95 % konfidensintervall for gjennomsnittsverdien (to standardfeil, SE, i hver retning ut fra det målte gjennomsnittet).

Resultatene som vises i figur 1.1 samsvarer på mange punkter med det vi har sett i TIMSS-studier i 2003 og 2007 for grunnskolen. Russland, Nederland og Libanon er alle høytpresterende, og ligger signifikant over det skalerte gjennomsnittet på 500. Norge presterer signifikant under det skalerte gjennomsnittet, slik norske elever på 4. og 8. trinn har gjort det i de to siste TIMSS-studiene for grunnskolen. (For mer om denne skalaen og om skalert gjennomsnitt, se kapittel 12.)

Land	Prosent-andel av årskullet	Alder	År på skolen	Skår	Fordeling av prestasjoner
Russland	1,4	17,0	10 eller 11	561	
Nederland	3,5	18,0	12	552	
Libanon	5,9	17,9	12	545	
Skalert gjennomsnitt				**500**	
Iran	6,5	18,1	12	497	
Slovenia	40,5	18,8	12	457	
Italia	19,7	19,0	13	449	
Norge	**10,9**	**18,8**	**12**	**439**	
Armenia	4,3	17,7	10	433	
Sverige	12,8	18,8	12	412	
Filippinene	0,7	16,4	10	355	

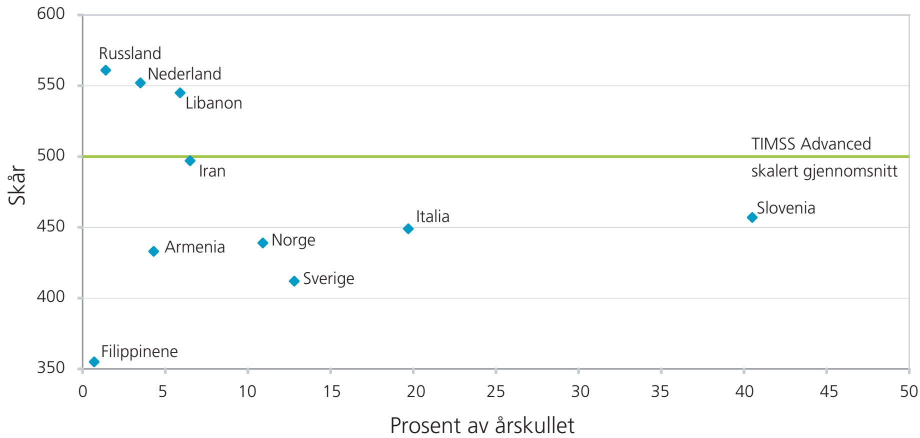


Figur 1.1 Hovedresultater i matematikk for alle landene som deltok i TIMSS Advanced i 2008. Se tekstboks 1.1 for forklaring.

I TIMSS-studiene i grunnskolen varierer den gjennomsnittlige alderen til elevene noe mellom landene (Mullis et al., 2004), siden populasjonene er definert etter antall år på skolen og elevene begynner på skolen i ulik alder. Variasjonene mellom landene er langt flere og større i TIMSS Advanced hvor populasjonen er definert som elever som tar avansert matematikk i det siste året på videregående skole. Både gjennomsnittlig alder, antall år på skolen og ikke minst hvor stor andel av den aktuelle aldersgruppa som undersøkes, varierer. Gjennomsnittlig antall år elevene har hatt formell skolegang varierer i TIMSS Advanced 2008 fra 10 år i Armenia og på Filippinene til 13 år i Italia, mens den gjennomsnittlige alderen til elevene varierer fra 16,4 år på Filippinene til 19 år i Italia.

Den største variasjonen gjelder likevel hvor stor andel av elevene i det aktuelle årskullet i hvert enkelt land som faller inn under populasjonsdefinisjonen, det vil si hvor stor prosentandel av elevene i årskullet som tar det landet har definert som avansert matematikk i det siste året på videregående skole. Denne andelen kalles *dekningsgrad* (*Coverage Index*). Figur 1.2 viser sammenhengen mellom dekningsgraden og landenes matematikkskår. I Russland, som denne gangen har høyest gjennomsnittsskår, er bare 1,4 % av årskullet med i populasjonen, mot hele 40,5 % i Slovenia. Tar man dette i betraktning, kan man hevde at Slovenia er det landet som gjør det best i TIMSS Advanced, selv om landet ligger signifikant under det skalerte gjennomsnittet.

På den annen side er de russiske elevene svært unge sammenliknet med elevene i både Slovenia og de fleste andre land; de slovenske elevene er nesten 2 år eldre enn de russiske. Det kan på bakgrunn av dette synes som om avansert matematikk i Russland er et typisk fag for en liten elite, som når et ganske høyt kompetansenivå allerede i ung alder. I Slovenia framstår matematikk mer som et viktig allmennfag for elever som tar videregående skole.



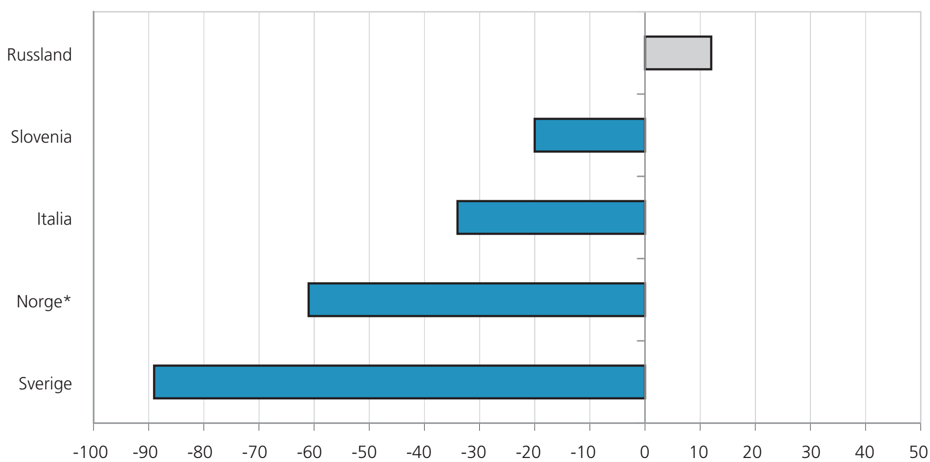
Figur 1.2 Sammenhengen mellom landenes matematikkskår og andel av årskullet som tar fordypning i matematikk (dekningsgrad).

De norske og svenske elevene har nøyaktig samme gjennomsnittlige alder som elevene i Slovenia, men det er bare 13 % av årskullet i Sverige og 11 % i Norge som tar avansert matematikk til topps i videregående skole. Likevel presterer de svenske og norske elevene svakere i TIMSS Advanced enn elevene i Slovenia. De presterer også svakere enn elevene i Italia, hvor 20 % av det aktuelle årskullet er med i populasjonen som testes. Mulige årsaker til dette relativt sett svake resultatet i de to skandinaviske landene som deltok i TIMSS Advanced i 2008, står sentralt i diskusjonene videre i boka.

1.2.2 Endring i matematikkprestasjoner fra 1995/1998

En viktig begrunnelse for å delta i internasjonale komparative studier er ikke bare å kunne sammenlikne egne resultater med resultatene for andre land, men like mye å kunne måle utvikling over tid i eget land. Gode trenddata forutsetter at elevene i de populasjonene som undersøkes i ulike år, får et tilstrekkelig antall identiske oppgaver i de to studiene. Det er viktig at disse oppgavene er helt identiske, siden selv relativt små endringer i en oppgave har vist seg å kunne gi store utslag på hvor vanskelig eller lett den faller ut (Olsen, Turmo og Lie, 2001). I TIMSS hemmeligholder man derfor en del oppgaver for å kunne bruke dem på nytt i senere undersøkelser. Slike *trendoppgaver* går altså igjen fra undersøkelse til undersøkelse og gjør at man i alle TIMSS-studiene har reliable data til å måle utvikling over tid, enten det gjelder utviklingen i grunnskolen eller i videregående skole.

Figur 1.3 viser endringene i elevprestasjoner for de landene som deltok i studien i matematikk i både 1995 og 2008, samt for Norge som altså gjennomførte 1995-studien i 1998. Endringene er beregnet som differansen i gjennomsnittsskår mellom disse to undersøkelsene, målt i forhold til den internasjonale skalaen med gjennomsnitt på 500. Landene er sortert etter hvor stor endringen har vært i positiv retning. Søyler mot høyre angir framgang i prestasjoner fra 1995 til 2008, mens søyler mot venstre angir tilbakegang i samme tidsrom. Feilmarginen varierer noe fra land til land, men ligger stort sett mellom 4 og 10 poeng.



Figur 1.3 Endring i matematikkskår i perioden 1995/1998–2008 for elever som tar full fordypning i matematikk. Blå farge viser at endringen er signifikant.*

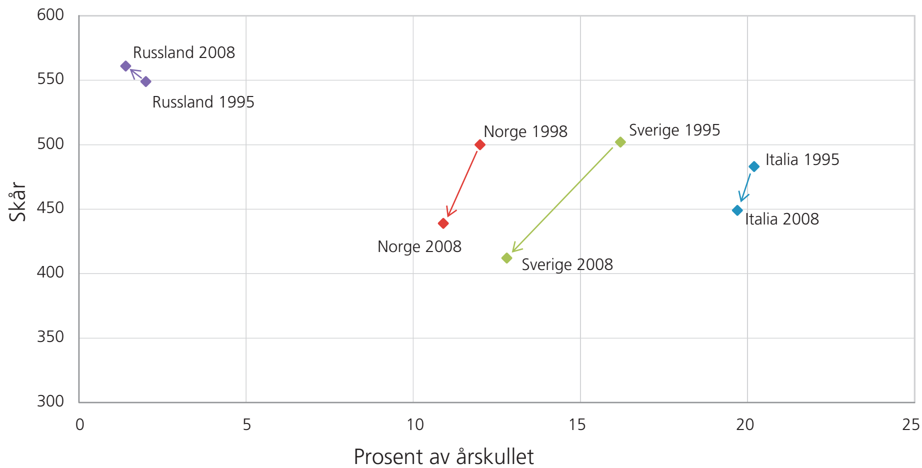
**Den første studien ble gjennomført i 1995 internasjonalt, unntatt i Norge hvor den ble gjennomført i 1998.*

Figur 1.3 viser at norske elever har hatt en klar og signifikant tilbakegang fra 1998 til 2008. Norge og enda klarere Sverige framstår som de to landene som har mest markant tilbakegang. I TIMSS 2003 utmerket Norge og Sverige seg på samme måte når det gjaldt endringer på 8. trinn fra 1995-studien. Det er verdt å merke seg at det årskullet som ble undersøkt i TIMSS 2003 på 8. trinn er det samme årskullet som er undersøkt i TIMSS Advanced i 2008. Resultatene i matematikk i TIMSS Advanced samsvarer dessuten med resultatene i fysikk. Også der var Norge og Sverige de to landene med størst tilbakegang (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

Resultatene fra TIMSS 2007 viste at de norske elevene hadde en viss framgang i matematikk fra 2003 til 2007, mens Sverige fortsatt hadde tilbakegang. Mulige årsaker til denne framgangen i Norge ble utførlig drøftet i boka *Tegn til bedring* (Grønmo & Onstad, 2009). Sverige var det eneste av de andre nordiske landene som deltok i TIMSS 2007 på 8. trinn. På bakgrunn av tilbakegangen i prestasjoner fra midten av 90-tallet i norsk og svensk skole, er det naturlig å spørre om hvilke endringer som har funnet sted de siste 15 årene i skolen i disse landene. Spørsmålet er for omfattende til å bli tatt opp i full bredde her, men det er behov for og det ligger til rette for mer dyptgående analyser på dette punktet.

Resultatene fra den norske matematikkstudien i 1998 er beheftet med større usikkerhet enn dataene fra den internasjonale undersøkelsen i 1995. Siden Norge ikke deltok i den internasjonale studien i 1995, var de norske dataene heller ikke med i skaleringen som danner grunnlaget for det standardiserte gjennomsnittet som brukes som mål i TIMSS. Den nasjonale rapporten fra studien i 1998 viste at de norske elevene presterte tilnærmet like godt som, eller så vidt i overkant av, det internasjonale gjennomsnittet fra 1995 (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999). I presentasjonen av endringer i figur 1.3 har vi tatt høyde for den noe større usikkerheten som er forbundet med de norske dataene fra 1998, ved å legge det norske resultatet i 1998 på internasjonalt gjennomsnitt fra 1995. Dermed unngår vi å overdrive tilbakegangen som de norske elevene har hatt fra 1998 til 2008.

Figur 1.4 viser både endringene i prestasjoner fra den forrige studien og endringene i dekningsgrad, det vil si prosentandel av årskullet som velger fordypning i matematikk. Samtidig som det har vært en tilbakegang i norske prestasjoner, har det også vært en tilbakegang i prosentandel av elevene som velger å fordype seg i matematikk, fra 12 % i 1998 til 11 % i 2008. De tilsvarende tallene for Sverige er 16 % og 13 %.



Figur 1.4 Endring i andel av årskullet som tar fordypning i matematikk sammen med endring i matematikkskår i TIMSS Advanced fra 1995/1998 til 2008.
(*Slovenia er ikke tatt med i figuren på grunn av stor usikkerhet i dataene fra 1995 når det gjelder andel av årskullet som ble testet.*)

Resultatene i matematikk samsvarer godt med fysikkresultatene; også i fysikk framstår Norge og Sverige som de to landene med mest markant tilbakegang fra 1995, samtidig som en lavere prosentandel av årskullet har valgt full fordypning i fysikk, i Norge fra 8 % i 1995 til 7 % i 2008, og i Sverige fra 16 % til 11 % (Lie, Angell & Rohatgi, 2010; Mullis et al., 2009).

1.3 Undervisning i matematikk (3MX)

I dette delkapittelet har vi valgt å sammenlikne Norge med fire av de andre deltakerlandene i TIMSS Advanced, nemlig Italia, Nederland, Slovenia og Sverige. Vi anser det i mange sammenhenger som mer relevant og interessant å sammenlikne med disse landene enn med de øvrige. Se 1.4 for en nærmere redegjørelse for vårt valg av disse fire som *referanseland*.

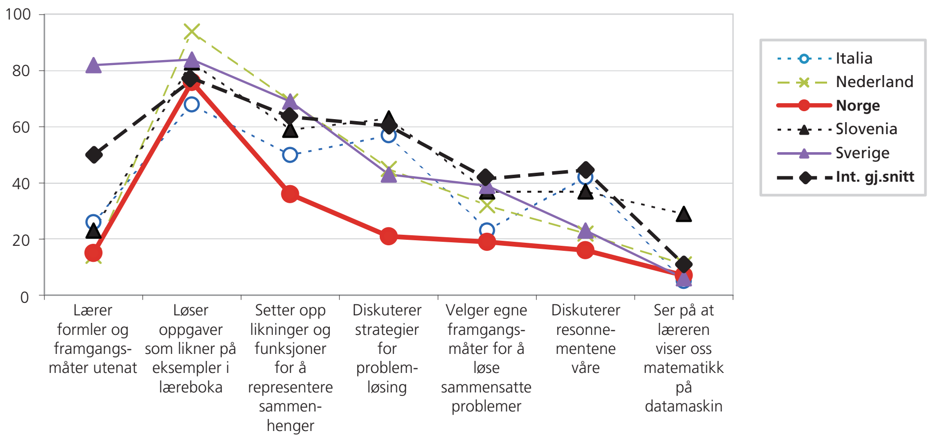
1.3.1 Noen kjennetegn ved norsk matematikkundervisning

Elevene ble spurt om hvor ofte ulike typer arbeidsmåter ble benyttet i undervisningen. De måtte velge mellom svaralternativene «Hver eller nesten hver time», «Omtrent halvparten av timene», «Noen timer» eller «Aldri».

Spørsmålene var knyttet til følgende kategorier:

A. Vi lærer formler og framgangsmåter utenat
B. Vi løser oppgaver som likner på eksempler i læreboka
C. Vi setter opp likninger og funksjoner for å representere sammenhenger
D. Vi diskuterer strategier for problemløsing
E. Vi velger egne framgangsmåter for å løse sammensatte problemer
F. Vi diskuterer resonnementene våre
G. Vi ser på at læreren viser oss matematikk på en datamaskin

Elevenes svar på disse spørsmålene samsvarer i stor grad med hva lærerne svarte på liknende spørsmål. Dette kommer vi tilbake til i kapittel 8 om undervisning i Norge sammenliknet med undervisning i andre land.



Figur 1.5 Elevenes syn på hvor ofte ulike arbeidsmåter benyttes i matematikktimene. Prosentandelen av elevene som svarer omtrent halvparten av timene eller oftere.

De to områdene hvor Norge ligger lavest i forhold til det internasjonale gjennomsnittet er å «lære formler og framgangsmåter utenat» og å «diskutere strategier for problemløsing». Norske elever ligger også klart lavere enn det internasjonale gjennomsnittet når det gjelder å «sette opp likninger» og å «diskutere resonnementer». At norske elever ligger klart under det internasjonale gjennomsnittet på disse spørsmålene samsvarer godt med resultatet for TIMSS i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009). De tilsvarende spørsmålene til elevene i grunnskolen var om hvor ofte de «pugget formler og framgangsmåter» og hvor ofte de «forklarte svarene sine». Både det å trene inn framgangsmåter med sikte på å automatisere visse ferdigheter og det å diskutere og reflektere rundt svar og løsningsmetoder blir mindre vektlagt i norsk skole enn i andre land, og dette gjelder på alle nivåer i skolen, fra barnetrinn til slutten av videregående skole.

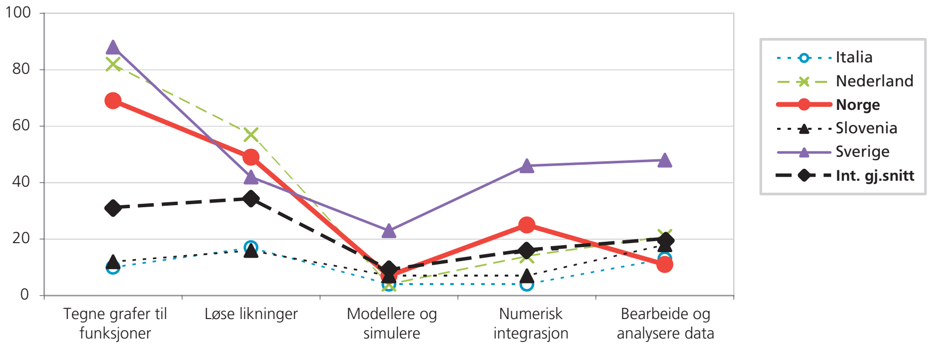
Man kan selvsagt spørre om hvor ønskelig det er å legge vekt på for eksempel utenatlæring av prosedyrer og framgangsmåter. Målet med å automatisere visse ferdigheter er blant annet å frigjøre kognitiv kapasitet som kan brukes til å løse mer avanserte matematiske problemer (Grønmo, 2005). Grunnleggende ferdigheter er noe man trenger på alle nivåer, fra de første årene i skolen til avanserte universitetsstudier. Hva som skal defineres som grunnleggende ferdigheter – og som det dermed er nyttig å automatisere – vil selvfølgelig endre seg med nivå. På barnetrinnet kan det for eksempel være multiplikasjonstabellen og algoritmer for de fire regningsartene for tall. På ungdomstrinnet kommer i tillegg manipulering av enkle algebraiske utrykk, og på videregående skole manipulering med noe mer avanserte utrykk i algebra og dessuten derivasjon. På universitetsnivå kan det være regneregler for komplekse tall og matriser. At det generelt legges lite vekt på å utvikle slike ferdigheter i norsk skole, kan være en medvirkende årsak til de svake norske resultatene i matematikk på alle nivåer i skolen. Resultatene på enkeltoppgaver som blir presentert i kapitlene 4–6 synes å understøtte dette.

De eneste områdene hvor Norge ligger på det internasjonale gjennomsnittet er å «løse oppgaver som likner på eksempler i læreboka» og «se på at læreren viser matematikk på en datamaskin». Resultater fra tidligere TIMSS-studier i grunnskolen viser også stor vekt på individuell oppgaveløsing og lite vekt på diskusjoner og argumentasjon. Dette ble, sammen med resultater fra andre studier (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003; Bergem, 2009), tatt som tegn på at det i norsk skole var overdreven vekt på individuelle arbeidsmåter i matematikk. Nå er det et generelt trekk i TIMSS Advanced at oppgaveløsing er en framtredende arbeidsmåte i alle land. Det problematiske er at norske elever rapporterer klart lavere på andre arbeidsmåter. Resultatene fra TIMSS Advanced støtter derfor tidligere konklusjoner fra studier i grunnskolen om at det er en *mer ensidig vekt* på denne arbeidsmåten i Norge enn i andre land. For mer om arbeidsmåter i matematikk, se ibid. og Grønmo & Throndsen (2006).

Bruk av ulike arbeidsmåter i 3MX, og generelt i matematikk i norsk skole, blir mer diskutert i senere kapitler om undervisning i matematikk. Dette temaet utgjør sammen med andre viktige resultater også en sentral del av kapittel 11, med drøftinger i et bredere forskningsmessig og skolepolitisk perspektiv.

1.3.2 Bruk av kalkulator i matematikkundervisningen

Lærerne ble spurt om hvor ofte elevene bruker kalkulator på ulike måter i matematikktimene. Av svarene framgår det at Norge, Sverige og Nederland skårer klart over det internasjonale gjennomsnittet på bruk av kalkulator til å tegne grafer og også over det internasjonale gjennomsnittet når det gjelder å løse likninger. Slovenia og Italia skårer derimot generelt lavt på alle spørsmålene om bruk av kalkulator i matematikktimene.



Figur 1.6 Lærernes svar på hvor ofte elevene bruker kalkulator til ulike aktiviteter i matematikktimene. Prosentandelen av lærerne som svarer omtrent halvparten av timene eller oftere.

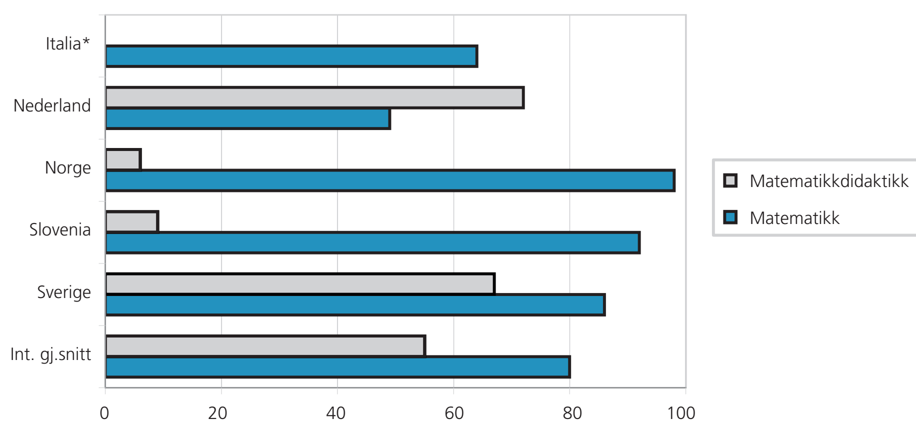
Det bør bemerkes at de lærerne som deltok i TIMSS Advanced, i streng statistisk forstand ikke var et tilfeldig utvalg av samtlige 3MX-lærere i Norge (og tilsvarende i de andre deltakerlandene). Det var gruppene med 3MX-elever som ble trukket ut, og lærerne til de uttrukne elevgruppene utgjorde lærerutvalget i undersøkelsen. Det er likevel god grunn til å se på disse lærerne som et representativt utvalg av 3MX-lærerne; se kapittel 12 for mer om dette.

Vi ser altså at de høytpresterende elevene i Nederland bruker kalkulator mye. Det er ikke overraskende. Flinke elever kan ha god nytte av slik teknologi. Samtidig ser vi at norske og svenske elever bruker kalkulator like mye og til dels enda mer enn de nederlandske elevene, samtidig som de skårer betydelig lavere. Så selv om flinke elever kan ha god nytte av kalkulatoren, er det ingen automatikk i at kalkulatorbruk i seg selv bidrar til gode kunnskaper og prestasjoner. Det blir ytterligere et tankekors at Slovenia og Italia ligger lavt når det gjelder kalkulatorbruk. Disse landene skårer jo oppsiktsvekkende høyt når det tas i betraktning at de har med henholdsvis 41 % og 20 % av årskullet i matematikkpopulasjonen i TIMSS Advanced. Også dette resultatet samsvarer med resultater for 8. trinn i grunnskolen, hvor Norge brukte kalkulator mye, mens for eksempel et høytpresterende land som Japan gjorde det i langt mer beskjeden grad (Grønmo & Onstad, 2009).

Mer om bruk av kalkulator inngår i kapitlene 8 og 9 om undervisning i matematikk, og også i den bredere drøftingen i kapittel 11.

1.3.3 Matematikklærernes faglige bakgrunn

Alle lærerne som hadde elever som deltok i TIMSS Advanced, ble spurt om hvilken utdanning de hadde. Dersom de hadde cand.mag. eller høyere grad, ble de bedt om å oppgi om de hadde minst 20 vekttall (60 studiepoeng) i ett eller flere av områdene matematikk, matematikkdidaktikk, naturfag (fysikk, kjemi, biologi, ingeniørfag), naturfagdidaktikk eller pedagogikk. Figur 1.7 viser prosentandelen av 3MX-lærerne i Norge og av tilsvarende matematikklærere i våre fire referanseland som oppgir at de har fordypning i matematikk og/eller matematikkdidaktikk.

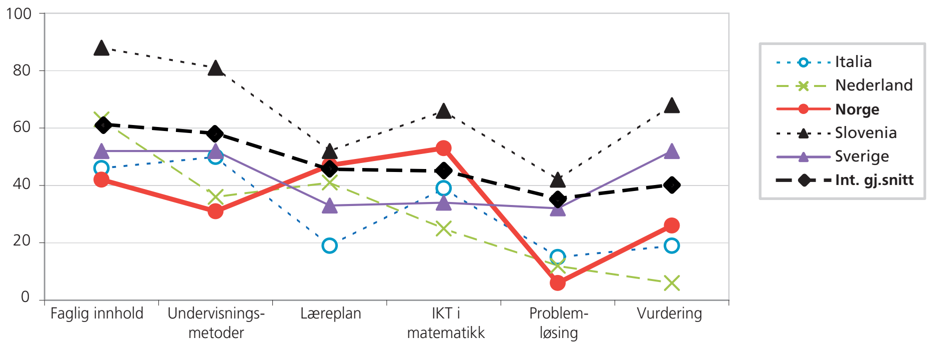


Figur 1.7 Prosentandelen av matematikklærerne i TIMSS Advanced som oppgir at de har fordypning i matematikk og/eller matematikkdidaktikk.
**De italienske lærerne ble ikke spurt om de hadde fordypning i matematikkdidaktikk.*

I Norge oppgir nesten samtlige lærere at de har fordypning i matematikk. Det er en høyere prosentandel enn i alle referanselandene og også klart høyere enn det internasjonale gjennomsnittet. Det er derimot en liten andel av de norske lærerne som oppgir at de har fordypning i matematikkdidaktikk. Matematikkdidaktikk er et relativt nytt fagområde i Norge, så dette er ikke overraskende. Man må også ta med i betraktning at utdanning av matematikklærere til videregående skole i Norge i overveiende grad har vært organisert slik at man tar faglig fordypning først og så ett års påbygning med matematikkdidaktikk, pedagogikk og praksis (PPU) etterpå. I enkelte andre land er utdanningen mer integrert mellom matematikk og matematikkdidaktikk, og hva som defineres som matematikk og matematikkdidaktikk vil derfor variere en del mellom landene.

Det som er viktig å merke seg, er at for studenter som velger full fordypning i matematikk i videregående skole, framstår Norge som et land hvor lærerne har høy fagkompetanse, generelt vel så høy som i andre land. Dette er et helt annet bilde enn det man har fått av lærere som underviser i matematikk i grunnskolen. Matematikklærerne i norsk grunnskole har et generelt høyt utdanningsnivå, men de mangler i stor grad fordypning i matematikk (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2004).

Når det gjelder hvor stor andel av matematikklærerne som har deltatt i faglig relevant etterutdanning, er det imidlertid en slående likhet mellom situasjonen for 3MX-lærerne og for matematikklærerne i grunnskolen.



Figur 1.8 Prosentandelen av matematikklærerne i TIMSS Advanced som oppgir at de har deltatt i etterutdanning i ulike temaer de siste to årene.

Det synes som om norske matematikklærere i mindre grad enn i andre land deltar i faglig relevant etterutdanning. Dette ser ut til å gjelde for alle nivåer i skolen. Det eneste emnet hvor norske lærere ligger over det internasjonale gjennomsnittet, er bruk av IKT i matematikk. Det kan være en indikator for hva myndigheter og skoleeiere satser ressurser på. Det synes som om IKT betraktes som det viktigste emnet å gi lærerne etterutdanning i for å gi en god matematikkundervisning. I kapittel 8 om undervisning i matematikk diskuteres matematikklærernes kompetanse ytterligere, og dette inngår også i de avsluttende drøftingene i kapittel 11.

1.4 Bruk av referanseland

I TIMSS Advanced har vi valgt å relatere de norske resultatene til fire såkalte *referanseland*, nemlig Italia, Nederland, Slovenia og Sverige.

Basert på utdypende analyser av data fra tidligere TIMSS- og PISA-studier i grunnskolen har det avtegnet seg ulike *undervisningsprofiler* i forskjellige grupper av land (Grønmo, 2010; Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Olsen, 2006; Olsen & Grønmo, 2006). Disse analysene er basert på data fra 8. trinn i TIMSS og 10. trinn i PISA. De viser hvilke deler av matematikken elever i et land presterer relativt best eller ikke så bra på. Analysene har tegnet ganske stabile mønstre for grupper av land over tid og i ulike studier. Følgende undervisningsprofiler har framstått som stabile: En nordisk profil som er nært forbundet med en engelskspråklig profil, en østeuropeisk profil som har enkelte fellestrekk med en østasiatisk profil, og en noe mer kompleks og sammensatt profil på det europeiske kontinentet. Det mest typiske er at elevene i de landene som grupperer seg i en nordisk eller en engelskspråklig profil presterer relativt best på oppgaver med kontekst fra dagliglivet, men relativt svakt på oppgaver som krever eksakte utregninger eller bruk av algebra. Dette står i klar motsetning til de østeuropeiske og østasiatiske profilene, hvor elevene relativt sett presterer best på oppgaver i ren matematikk som krever eksakte utregninger og/eller bruk av algebra (ibid.). Det var også klare forskjeller innen disse to gruppene, mellom den nordiske og den engelskspråklige profilen og mellom den østasiatiske og den østeuropeiske, uten at vi går nærmere inn på det her. For mer om dette henviser vi til referansene over.

I de norske TIMSS-rapportene fra grunnskolen ble det valgt ett referanseland for hver av disse profilene. Det ligger ikke til rette for å gjøre det samme i TIMSS Advanced, siden det ikke deltar noen land som kan representere den engelske eller den østasiatiske undervisningsprofilen. Vi har derimot valgt å ta med ett nordisk land, Sverige, to land fra det europeiske kontinentet, Nederland og Italia, og Slovenia som representant for den østeuropeiske profilen. Alle disse landene unntatt Sverige har vært valgt som referanseland i tidligere norske TIMSS-rapporter. Det ligger derfor til rette for å kunne sammenlikne resultater fra den videregående skolen som presenteres i denne boka med resultater fra grunnskolen i tidligere TIMSS-studier (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009). Når Sverige ikke har vært valgt som referanseland i tidligere TIMSS-studier, er det hovedsakelig fordi i TIMSS-studiene i grunnskolen undersøker Sverige elever som er ett år eldre enn de norske elevene (for mer om dette, se Grønmo & Onstad, 2009).

Ved valg av referanseland for TIMSS Advanced har vi også prøvd å få med land hvor elevene har tilnærmet samme alder som de norske. Elever fra Sverige, Slovenia og Norge har nøyaktig samme gjennomsnittlige alder i TIMSS Advanced, nemlig 18,8 år. De italienske elevene er 0,2 år eldre enn dette, mens de nederlandske er 0,8 år yngre. Viktigere enn alder når det gjelder sammenlikninger mellom land i TIMSS Advanced er det å ta hensyn til hvor stor prosentandel av årskullet som tar avansert matematikk til topps i videregående skole, altså «dekningsgraden» som vi har omtalt i delkapittel 1.2.1. Denne prosentandelen varierer fra under 1 % på Filippinene og drøyt 1 % i Russland til vel 40 % i Slovenia. Det blir i denne boka flere ganger henvist til disse prosentandelene når vi kommenterer elevenes prestasjoner, for eksempel i kapitlene 4, 5 og 6 om prestasjoner på enkeltoppgaver.

Av de valgte referanselandene er det bare Nederland som ikke deltok i TIMSS Advanced i 1995. Det er en fordel at vi kan sammenlikne de fleste referanselandene med resultater fra den forrige studien.

Som det har blitt påpekt også i tidligere TIMSS-rapporter, kan de forskjellene man finner mellom land ofte ikke forstås uten en grundig analyse av det enkelte lands skolesystem og samfunn i en videre forstand. Resultatene fra de valgte landene blir derfor i hovedsak brukt som referansepunkt for å reflektere rundt de norske resultatene; det er begrunnelsen for å bruke betegnelsen referanseland. Det vil gå utover rammene for denne boka å gjøre en dypere analyse av de enkelte landenes skolesystemer. For mer om skolesystemene i de enkelte land – spesielt grunnskolen – henvises det til TIMSS 2007 Encyclopedia (Mullis et al., 2008).

2 TIMSS Advanced – et matematikkdidaktisk perspektiv

Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo

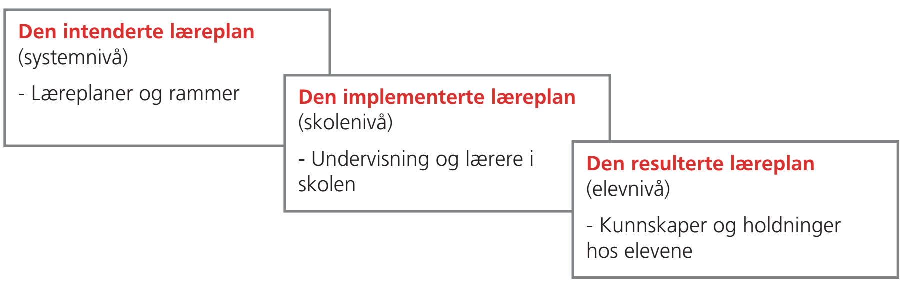
TIMSS Advanced gir oss gode data og mye informasjon om matematikk i videregående skole. Dette er et velegnet utgangspunkt for å diskutere sentrale temaer i norsk skole og relatere dem til fagdidaktisk forskning. Det gjelder for eksempel spørsmål om innhold og krav til matematikkundervisningen i skolen, og spørsmål knyttet til rekruttering til utdanninger og profesjoner som krever gode kunnskaper i matematikk. Tidligere TIMSS-studier har gitt mye informasjon om situasjonen i grunnskolen og om utviklingen fra midten av nittitallet sett i et nasjonalt så vel som et internasjonalt perspektiv. Med data også fra TIMSS Advanced ligger det til rette for å diskutere elever med fordypning i matematikk spesielt, og til å drøfte situasjonen for matematikkfaget i norsk skole generelt – barnetrinn, ungdomstrinn og videregående skole sett i sammenheng.

I dette kapittelet gis det en kort oversikt over det generelle rammeverket for TIMSS Advanced. Med utgangspunkt i matematikkdidaktisk forskning blir noen begrunnelser for matematikk i skolen presentert og drøftet ut fra behovet for å gi faglig fordypning til en del av elevene, også på lavere trinn i skolen. Det blir referert til forskning på innhold og metoder i matematikkundervisning med vekt på relevans for videregående skole. I tillegg til data som viser hvor godt elevene presterer i matematikk, har TIMSS Advanced også spørreskjemaer til elever og lærere. Mange av spørsmålene der er relatert til undervisning. TIMSS Advanced gir oss, sammen med data fra TIMSS i grunnskolen, mye informasjon som er nyttig når man skal drøfte matematikkfaget i norsk skole i et bredt nasjonalt og internasjonalt perspektiv.

En del av det som presenteres i dette kapittelet, både av forskning og av refleksjoner, har tidligere blitt presentert i rapporten fra TIMSS 2007 for grunnskolen (Grønmo & Bergem, 2009). Det nye er at her relateres dette til matematikk i videregående skole.

2.1 Mål og rammeverk i TIMSS Advanced

TIMSS Advanced har utviklet et *rammeverk* for studien (Garden et al., 2006). Dette beskriver studiens mål og innhold med utgangspunkt i ulike aspekter av det vi kan kalle et *utvidet læreplanbegrep* på norsk (*curriculum* på engelsk). Begrepet læreplan inkluderer da alle nivåer i skolesystemet, både systemnivå, skole-/klassenivå og elevnivå. Dette er illustrert i figur 2.1. Denne måten å bruke begrepet læreplan på er basert på tidligere forskning innen læreplanteori (Goodlad, 1979, 1986), og den dannet utgangspunkt for rammeverket som ble utviklet for TIMSS 1995 og brukes i senere IEA-studier. Også flere nordiske forskere bidro i utviklingen av denne teorien (Gundem, 1990; Lundgren, 1979; Lundgren, Svingby & Wallin, 1983).



Figur 2.1 De tre nivåene av «læreplanen» i TIMSS Advanced.

Det øverste nivået er *systemnivået*, det som i figuren kalles *den intenderte læreplan* og som handler om tilrettelegging og organisering av skolen fra myndighetenes side. Innholdet i den intenderte læreplanen gjenspeiler seg i læreplandokumenter og i andre uttalte intensjoner for skolen fra ansvarlige myndigheter. Det inkluderer også andre rammefaktorer, som hvordan skolesystemet er organisert og hvilke muligheter elevene har for valg av skole og fag. Det er dessuten vanlig å regne eksamensordninger til det intenderte nivået, i den forstand at eksamen kan antas å være et viktig styringsredskap i skolen. Informasjon om skolesystemene i de enkelte land er i TIMSS Advanced innrapportert av de nasjonale prosjektsentrene.

Neste nivå er *skolen og klasserommet*, det som i figuren er kalt *den implementerte læreplan*. Betegnelsen implementert henviser til hvordan læreplan og rammer fra det overordnede nivået, systemnivået, nedfeller seg på den enkelte skole og i den enkelte klasse. Det går på rammefaktorer på skolen og i klassen, med selve undervisningen som en avgjørende faktor. På dette nivået er klassemiljø og hva som skjer i timene det sentrale, men også for eksempel informasjon om lærerens utdanning og hvor mye tid elevene bruker på lekser. Informasjon om dette er hentet fra spørreskjemaer til rektorer, lærere og elevene selv.

Det siste nivået gjelder elevenes *læringsresultater*, det som i figuren er kalt *den resulterte læreplan*. Læringsresultater går her både på kunnskaper og ferdigheter elevene har tilegnet seg, og på de holdningene de har utviklet. TIMSS Advanced har som mål å teste, beskrive og sammenlikne elevprestasjoner både nasjonalt og internasjonalt, og å forsøke å forklare og forstå disse resultatene i lys av de to nivåene over, skolenivå og systemnivå. Det er også et mål å forstå prestasjonene – og variasjoner i prestasjonene – ut fra elevenes bakgrunn og holdninger. Informasjon på dette nivået får man gjennom det spørreskjemaet elevene har svart på og de kunnskapene de viser at de har i den faglige testen de har fått. For mer om rammeverket i TIMSS Advanced, se kapittel 12.

I dette kapittelet ligger hovedvekten på beskrivelser og forskning knyttet til de to øverste nivåene i det utvidede læreplanbegrepet, systemnivå og skole-/klassenivå. I senere kapitler danner dette et bakteppe for å forstå og drøfte elevenes prestasjoner. Den resulterte læreplan, elevenes prestasjoner og holdninger, blir i boka presentert som utgangspunkt for de fleste drøftingene som gjøres.

2.2 Den intenderte læreplan

2.2.1 Hvorfor matematikk i skolen?

Det har blitt brukt varierende begrunnelser for å legitimere den sentrale plassen matematikk har i grunnskole og videregående opplæring verden over. Den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss (2003) hevder at de fleste av disse begrunnelsene kan knyttes til følgende tre kategorier:

- samfunnets teknologiske og sosioøkonomiske utvikling
- samfunnets politiske, ideologiske og kulturelle eksistens og utvikling
- behovet for å utruste det enkelte individ med de kunnskapene det kan trenge for å håndtere privatliv, yrkesliv (utdanning og yrke) og samfunnsliv

Hvilke begrunnelser som vektlegges, kan variere over tid og mellom land. I de nordiske og engelskspråklige landene har det vært lagt mye vekt på at et levende demokrati forutsetter kompetente samfunnsborgere, mens det i land som Tyskland, Frankrike, Russland og Kina har vært lagt større vekt på begrunnelser som går på samfunnets kulturelle og ideologiske eksistens.

Utviklingen av naturvitenskap, ingeniørfag, økonomi og informasjonsteknologi baserer seg i avgjørende grad på matematikk. Det samme gjør mye av forskningen i medisin og samfunnsvitenskap. Aldersbestemmelser i arkeologi og strukturbeskrivelser i lingvistikk kan utføres ved hjelp av matematikk. Matematiske modeller og beregninger gjennomsyrer dagens høyt utviklede teknologiske samfunn (Skovsmose, 1994; Ernest, 2000). I innledningen til den reviderte læreplanen for matematikk felles allment fag i Reform 94 står det at

> Stadig flere studerer et fag der de trenger matematikk som verktøy, og mange har et arbeid som forutsetter matematiske kunnskaper eller bygger på matematisk teknologi. I et moderne samfunn finnes matematikken overalt uten at vi legger merke til den. (KUF, 2000, s. 4)

I det nye strategidokumentet *Realfag for framtida* skriver kunnskapsministeren:

> I vårt eget land gir realfaglig og teknologisk kunnskap mye av grunnlaget for verdiskaping og velferd. Denne kompetansen skaper arbeidsplasser og gir viktige bidrag til helse og velferd. (KD, 2010, s. 5)

De som velger fordypning i matematikk i videregående skole utgjør den gruppen elever som er mest aktuelle for å kunne ta utdanninger og senere gå inn i profesjoner som krever en god faglig basis i matematikk.

Siden slutten av 1800-tallet har det vært lagt vekt på alles rett til utdanning, først på grunnskolenivå, senere også i videregående skole og på universitetet. I Norge har det særlig etter 2. verdenskrig vært stor nasjonal enighet om alles rett til, og like muligheter for, å ta utdanning på alle nivåer. I de siste tiårene har *Matematikk for alle* blitt et slagord med stor gjennomslagskraft, ikke minst i nordiske og engelskspråklige land. Hva som ligger i dette slagordet, og hvordan det tolkes og implementeres i skolen, har stor betydning. Hvis det tolkes som at skolen skal legge hovedvekten på et innhold som alle elever har mulighet til å lære, vil det kunne føre til at elever med spesiell interesse og talent for matematikk ikke får de utfordringene de trenger. I norske læreplaner pekes det på elevenes rett til opplæring tilpasset egne evner og anlegg. Likevel har det blitt hevdet at måten dette har blitt implementert på i grunnskolen, mer har vært en tilpasning av det faglige innholdet til noe alle kan lære enn det har vært å ta hensyn til elever med spesielle anlegg, for eksempel i matematikk (Skagen, 2002; Grønmo & Onstad, 2009).

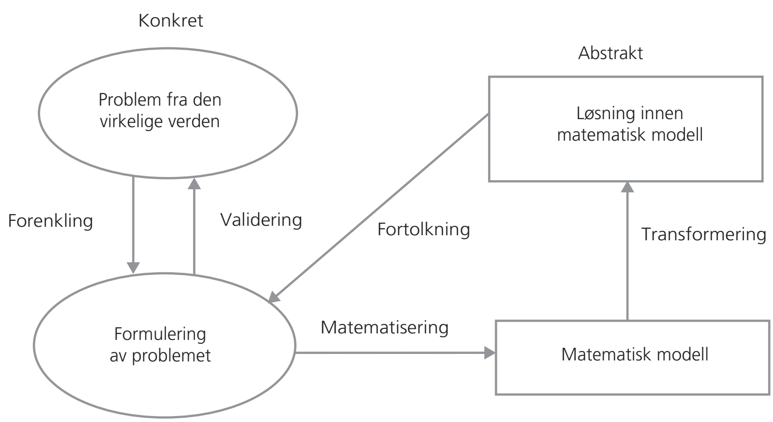
I rapporten fra TIMSS 2007 i grunnskolen, pekes det på at resultatene for norske grunnskolelever tyder på at de i mindre grad enn jevngamle elever i andre land får opplæring i algebra (Grønmo & Onstad, 2009). Dette kan føre til at norske elever har et dårlig utgangspunkt for å velge fordypning i matematikk i videregående skole. Spesielt vanskelig kan det bli hvis de ønsker å ta deler av utdanningen sin i andre land, noe det i dag legges mye vekt på at elever skal ha mulighet til å gjøre. Det vil også kunne få som konsekvens at elever som er faglig sterke i matematikk ikke stimuleres gjennom faglige utfordringer til å velge fordypning i matematikk. For elever som liker matematikk vil algebra i grunnskolen kunne være den typen utfordringer som kan bidra til økt faglig interesse. Dette blir tatt opp i flere kapitler i denne boka, og det utgjør en sentral del av drøftingene i kapittel 11, hvor viktige resultater settes inn og drøftes i en mer helhetlig forsknings- og skolepolitisk kontekst.

2.2.2 Faglig innhold i skolematematikken

En viktig begrunnelse for matematikk i skolen er å gi elevene den basiskunnskapen de trenger for å kunne løse problemer de står overfor i privatliv og yrkesliv. «Alle bruker matematikk» som det står i R94, enten de «nøyer seg med den enkle matematikken som er nødvendig for å lage mat, gå i butikken eller passe tiden» eller de tilhører den økende gruppen av befolkningen som «studerer et fag der de trenger matematikk som verktøy» (KUF, 2000, s. 4). Alle typer matematisk kompetanse forutsetter at elevene utvikler en basis av fakta, ferdigheter og begrepsforståelse innen tall og tallregning, det vi kan kalle en faglig basis i *ren matematikk*. I hvilken grad elevene vil trenge en mer avansert faglig basis i ren matematikk, for eksempel i algebra, funksjonslære og geometri, vil variere, blant annet avhengig av yrkesplaner for den enkelte. Samfunnet har behov for at en viss andel av befolkningen har en relativt høy kompetanse i matematikk. Å utdanne personer med høy matematisk kompetanse kan altså begrunnes både ut fra enkeltindividers ønsker om å utdanne seg til yrker hvor slik kompetanse er nødvendig, og ut fra samfunnets behov for teknologisk og økonomisk utvikling. Grunnskolens oppgave blir derfor å gi alle elever en god basis innen tall og tallregning. I tillegg behøver i alle fall en del av elevene en faglig basis i mer avansert matematikk, for eksempel i algebra, som de vil trenge for å gå videre med matematikk i videregående skole (Grønmo & Onstad, 2009).

Norge har, i likhet med de andre nordiske landene, en profil i sin matematikkundervisning som legger mer vekt på anvendt matematikk enn på ren matematikk (Grønmo, 2010; Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Olsen, 2006; Olsen & Grønmo, 2006). Dette gjenspeiler at *bruk av matematikk i dagliglivet* har vært en drivende kraft i utviklingen av læreplaner i de nordiske landene (Grønmo, 2010). For å kunne bruke matematikk til å løse et problem, det være seg i dagligliv eller i yrker som anvender avanserte matematiske modeller, trenger man imidlertid en solid faglig basis i ren matematikk. I dagliglivet vil det nok som oftest dreie seg om en basis innen tall og tallregning eller i statistikk. I yrker som benytter avanserte matematiske modeller vil det ofte være nødvendig med en solid basis også på områder som algebra, funksjonslære og geometri.

Anvendelse av matematikk er illustrert i figur 2.2. *Matematisering* brukes som en betegnelse på prosessen med å gå fra et problem i den virkelige verden til en formulering av dette i matematisk språk.



Figur 2.2 Forholdet mellom den virkelige verden og den matematiske verden (etter NCTM, 1989).

Høyre side av figuren refererer til den abstrakte matematiske verden, og venstre side refererer til problemer i den virkelige verden. Et konkret problem i den virkelige verden blir matematisert, altså «flyttet over» til den matematiske verden og løst ved hjelp av ren matematikk. Når man skal diskutere innholdet i skolematematikken, er det fornuftig å diskutere hvor mye vekt som skal legges på ren matematikk i forhold til anvendt matematikk. Anvendelse forutsetter at man med utgangspunkt i et autentisk problem kan matematisere ved å sette opp en modell som man arbeider med innenfor ren matematikk, for til slutt å relatere det matematiske svaret tilbake til problemet i den virkelige verden. For å kunne lykkes med dette, kreves det at man både har kompetanse i ren matematikk og får anledning til å arbeide med autentiske problemstillinger. Den nedprioriteringen man har sett i norsk skole av grunnleggende ferdigheter i ren matematikk, er derfor problematisk. Det hjelper lite å studere konkrete problemer som kan løses matematisk, dersom man ikke behersker den matematikken som trengs for å løse problemene. For mer om nødvendigheten av en solid faglig basis i ren matematikk henviser vi til rapporten fra TIMSS 2007 (Grønmo & Onstad, 2009), og til andre artikler hvor dette drøftes (Grønmo, 2005; Grønmo & Olsen, 2006).

I norsk skole er det et mål at alle elever skal kunne bruke sin matematiske kunnskap, men dette kan ikke være et alternativ til at elevene også trenes i og lærer ren matematikk (Gardiner, 2004). Som det påpekes i R94:

> matematikk er mer enn anvendelser, faget har også sine egne problemstillinger, metoder og teknikker. Det er disse som binder faget sammen, og som gjør det mulig å utvikle generelle metoder som kan benyttes på mange forskjellige fagfelt. Selv de som bare er interessert i matematikkens anvendelser, må skaffe seg innsikt i fagets struktur og tenkemåte for å forstå mulighetene og begrensningene. (KUF, 2000, s. 4–5)

Økt vekt i skolen på anvendelser av matematikk har medført mindre vekt på den rene matematikkens presise formuleringer og logiske struktur (Gardiner, 2004). Formuleringer som «bare en manipulering med symboler» eller «mekanisk regning» har blitt brukt om det å beherske de fire regningsartene eller å kunne arbeide med algebraiske utrykk eller løse likninger. Viktigheten av å ha slike ferdigheter og faktakunnskaper har til en viss grad blitt nedtonet i skolematematikken, mens begrepsforståelse og problemløsing har blitt framhevet.

Matematikk kan betraktes både som et *produkt* og som en *prosess*. Matematikk som produkt er for eksempel faktakunnskaper og ferdigheter på et område, mens prosessaspektet særlig er knyttet til aktivitetene som fører fram til en løsning. I skolefaget har det etter hvert blitt vanlig å legge mye vekt på prosessaspektet. Det har blitt understreket at elevene ikke bare skal lære seg fakta og ferdigheter, men at de skal utvikle en god begrepsforståelse og hensiktsmessige strategier for problemløsing. Det er ikke vanskelig å være enig i at både produkt- og prosessaspektet av matematikken er viktig i en læringsprosess, og at man skal vektlegge både utvikling av faktakunnskap og ferdigheter på den ene siden og begrepsforståelse på den andre. Problemet oppstår hvis en av sidene får stor oppmerksomhet, mens den andre i stor grad nedtones eller mer eller mindre overses. Wu (1999) diskuterer det han kaller falske eller uheldige dikotomiseringer innen forskning og utdanning i matematikk. Eksempler på slike dikotomier er *basisferdigheter versus begrepsforståelse* og *faktakunnskap versus høyere ordens tenkning*. Det er heller slik at basisferdigheter og begrepsforståelse er gjensidig avhengige av hverandre (Wu, 1999; Sfard, 1991; Ostad, 1992). De er som to sider på en mynt; den ene siden kan vanskelig tenkes uten den andre. I R94 står det at «i skolefaget matematikk må vi finne en balanse mellom anvendelser på den ene siden og teori, metoder og regneteknikk på den andre» (KUF, 2000, s. 5).

Den økte vekten på matematikk i dagliglivet, spesielt i L97, sammen med en klar nedtoning av blant annet algebra på ungdomstrinnet, har konsekvenser også for elevenes læring av matematikk i videregående skole. Starter de med et svakere grunnlag fra ungdomstrinnet, vil det naturlig nok påvirke læringen i videregående skole på en negativ måte. Det er positivt at man har innført nasjonale prøver som tester elevene i grunnleggende ferdigheter, slik som grunnleggende regneferdighet. Det tankevekkende blir imidlertid at dette *bare* knytter seg til tall og regning. Man tar ikke i betraktning at mange elever også trenger å utvikle en faglig basis i for eksempel *algebra* for å kunne gå videre med matematikk i videregående opplæring og høyere utdanning. Dette ble tatt opp og problematisert i rapporten fra TIMSS 2007 (Grønmo & Onstad, 2009) med henvisning til at også kompetanse innen algebra utvikles over tid. Når algebra nedtones i grunnskolen vil «denne nedprioriteringen kunne medføre at særlig flinke norske elever blir fratatt muligheten til å utvikle en høy realfaglig kompetanse» (ibid., s. 234).

Tidlig på 1990-tallet gjorde grafiske kalkulatorer sitt inntog i matematikkundervisningen i USA, Australia og flere europeiske land (Brown, 2009). I Norge har grafiske kalkulatorer vært mye brukt i matematikken på videregående skole siden midten av 90-tallet, og de har vært et tillatt hjelpemiddel ved eksamen i matematikkfagene 1MX/MY, 2MX/MY/MZ og 3MX/MY/MZ i

Reform 94. Synet på bruk av grafiske kalkulatorer (med eller uten symbolbehandlingsmuligheter) har vært delt. Fra noen hold er det blitt hevdet at slike kalkulatorer kan hjelpe elevene fram mot en dypere forståelse av matematiske begreper, mens andre har betraktet dem som «krykker» som hindrer elever i å utvikle ferdigheter i for eksempel algebra og funksjonsdrøfting (Brown, 2009; Persson, 2009). I R94 understrekes det at bruk av ny teknologi ikke fører til mindre behov for matematiske kunnskaper, heller det motsatte:

> Mange matematiske beregninger utføres i dag av datamaskiner. Det betyr ikke at menneskelige kunnskaper og ferdigheter i matematikk er overflødige. Riktignok er datamaskinene overlegne når det gjelder å behandle store informasjonsmengder raskt og effektivt, men noen må omsette denne informasjonen til matematisk form, skrive programmene som styrer maskinene og tolke resultatene de kommer fram til. Ved hjelp av datamaskinene kan vi i dag utføre beregninger som tidligere ville ha vært uoverkommelige, og framveksten av datateknologien har derfor ført til at vi har et større behov for matematiske kunnskaper enn før. (KUF, 2000, s. 4)

Norge fikk en ny læreplan for videregående opplæring i 1994 (R94), og en ny læreplan for grunnskolen i 1997 (L97). Matematikkplanen i R94 ble revidert i 2000 på grunn av behovet for en tilpasning til matematikkplanen i L97. Det er en betydelig forskjell mellom de to læreplanversjonene for kursene 2MX og 3MX før og etter 2000. Revisjonen gikk til dels betydelig lenger enn det forandringene i L97 krevde. Mye stoff ble tatt ut av 3MX, og nytt ble tilføyd. Mange av forandringene i 3MX skyldtes også at emner som før var en del av 2MX nå ble flyttet til 3MX og omvendt. I vedlegget bak i boka gis det en skjematisk oversikt over hovedpunktene i denne revisjonen. I drøftingen av resultater, særlig i kapitlene 4, 5 og 6 som presenterer elevenes prestasjoner på de frigitte oppgavene, blir det henvist til læreplanen slik den var før og etter revisjonen i 2000.

2.3 Den implementerte læreplan

Det er en stor utfordring for matematikklærere på alle trinn i skolen å skulle tilrettelegge undervisningen i faget slik at den passer for alle elevene i klassen. Problemet oppleves kanskje som størst i grunnskolen, hvor man skal tilrettelegge for alle elever uansett faglig nivå. I videregående skole forholder man seg tross alt til en utvalgt gruppe elever, ikke minst gjelder det for de som tar fordypning i fag som 2MX og 3MX. Men uansett vil spørsmålet om hvordan man kan undervise i matematikk slik at læringsutbyttet for alle elevene blir optimalisert, stå sentralt. Er det noen undervisningsmåter som generelt fungerer bedre enn andre? Eller er det slik at ulike arbeidsmåter bør benyttes, for eksempel ut fra kriterier som klassetrinn og elevens kognitive eller faglige nivå? Denne typen spørsmål ligger til grunn for mye av den forskningen som er knyttet til matematikkundervisning i grunnskolen, det være seg kvantitative studier som TIMSS og PISA, kvalitative klasseromsstudier (Haug, 2007; Klette et al., 2008) eller forskningsprosjekter knyttet til evalueringer av implementert læreplan (Alseth, Breteig & Brekke, 2003; Klette, 2003).

Konstruktivismen har fra slutten av 1970-tallet og til langt utover på 1990-tallet vært dominerende som læringsteori innenfor matematikkdidaktikk (og naturfagdidaktikk). Man finner ulike varianter av konstruktivistisk teori, men den sentrale tesen i alle disse variantene er at individet selv konstruerer sin kunnskap ut fra interaksjon med omgivelsene. Kunnskap utvikles ved at individet knytter nye erfaringer til allerede eksisterende kognitive strukturer (Ernest, 1998). Basert på et slikt syn på læring og kunnskapsutvikling har det blitt understreket at det er svært viktig i all undervisning å ta hensyn til elevenes forkunnskaper og tilpasse undervisningen til disse. Norske læreplaner har vært påvirket av denne læringsteorien; særlig i L97 finner vi flere formuleringer som kan spores tilbake til dette synet på læring. Philips (1995) hevder at en av de store fortjenestene til den konstruktivistiske læringsteoriens inntog i skolen er at det å gi elevene individuell oppfølging har blitt allment akseptert.

I de siste to desenniene har imidlertid konstruktivisme som lærings- og kunnskapsteori blitt til dels kraftig kritisert for å ha et ekstremt individualistisk utgangspunkt. Kritikken har særlig vært rettet mot konstruktivismens manglende evne til å redegjøre for sosiale og kulturelle faktorers betydning for læring og kunnskapstilegnelse (Kilpatrick, 1987; Lermann, 1996; Waschescio, 1998; Sfard, 1998, 2006). *Sosialkonstruktivismen* forsøkte å imøtekomme denne kritikken ved i større grad å vektlegge og integrere sosiale aspekter i den konstruktivistiske læringsteorien (Ernest, 1998; Björkquist, 1993). Det kan likevel hevdes at kritikken av konstruktivismen har ført til stor interesse for andre typer læringsteorier, særlig *sosiokulturell teori*. Her defineres læring som det å utvide sitt «diskursive repertoar», det vil si å forbedre sitt grunnlag for å delta i faglig relevante samtaler. (For en mer utførlig utlegning av sosiokulturell læringsteori, se for eksempel Säljö, 2006.) En utvidelse av det diskursive repertoaret oppnås først og fremst gjennom deltakelse i kommunikative samhandlinger med andre. *Deltakelse* og *kommunikasjon* er altså nøkkelbegreper her. I matematikkdidaktisk forskning har dette blant annet medført at det har blitt ansett som særlig viktig å studere innholdet i de matematikkfaglige samtalene i klasserommet.

Colliver (2002) hevder at hensikten med utdanningsforskning, som nettopp vil bygge på ulike læringsteoretiske og epistemologiske grunnsyn, er å forbedre undervisningspraksisen. Cobb (2002) advarer på den annen side mot å «oversette» læringsteorier til spesifikke undervisningsmetoder og argumenterer for at slike teorier og metoder befinner seg på ulike epistemiske nivåer. Det kan imidlertid argumenteres for at all undervisningspraksis er relatert til bestemte kunnskaps- og læringssyn, noe som kommer tydelig fram i følgende sitat: «All teaching practice supposes an epistemology, a theory of the knowledge it transmits» (Sensevy et al, 2008, s. 435). Læreplaner – hvor visse undervisningsmetoder til tider spesifiseres og anbefales – vil for eksempel i stor grad måtte ta utgangspunkt i anerkjente teorier om læring. Lærersentrerte undervisningsmetoder har ofte blitt knyttet til og begrunnet i en behavioristisk læringsteori (Greeno, Collins & Resnick, 1996; Lerman & Zevenbergen, 2004). Konstruktivisme har på tilsvarende måte blitt brukt til å begrunne elevsentrerte undervisningsmetoder (Sfard, 2000; Carlgren et al., 2006).

Å «oversette» læringsteorier til undervisningspraksis er langt fra enkelt. Det går ingen enkle og entydige linjer fra teorier om læring og kunnskapsutvikling til undervisningsmetoder og arbeidsmåter i klasserommet. Særlig problematisk er dette om man ikke har en dypere forståelse av de læringsteoretiske grunnprinsippene. Da kan man komme til å trekke vidtrekkende konklusjoner som det ikke er grunnlag for i teorien. For eksempel har konstruktivistiske læringsteorier blitt brukt til å begrunne en sterk vektlegging av utforsking, eksperimentering og lek som metoder i matematikkundervisningen, og med en tilsvarende avvising av metoder som drill og automatisering av ferdigheter. En framtredende matematikkdidaktiker innen konstruktivistisk og sosialkonstruktivistisk teori, Paul Ernest, har uttalt at

> Rote learning, drill and practice, and passive listening to lectures can, as they always have, give rise to learning. Active learning can be mental, and so visible

> inactivity on the part of the learner is irrelevant […] the constructivist view of learning does not rule out any teaching techniques in principle. (Ernest, 2004, s. 65)

Hvis metoder som utforsking og eksperimentering brukes, er det helt avgjørende at de aktivitetene man setter i gang rammes inn og eksplisitt relateres til faglige læringsmål. Hvis aktivitetene blir stående som løsrevne enkelthendelser, er det fare for at det matematiske innholdet blir uklart for elevene, og at læringsutbyttet derfor blir lite. Aktiviteter som settes i gang uten klare rammer og mål, har blitt pekt på som et problem i norsk grunnskole (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003; Klette, 2003; Carlgren et al., 2006; Grønmo et al., 2004; Kjærnsli et al., 2004). På den annen side har variasjon i bruk av metoder blitt understreket som viktig for å stimulere og motivere elever til å lære matematikk. Dersom elevene skal lykkes med å utvikle en bred og sammensatt matematikkfaglig kompetanse, inklusive positive holdninger til faget, er det avgjørende at læreren benytter varierte arbeidsformer i sin undervisning, se for eksempel Cockroft Report (1982) og HMI (1985). Disse rapportene gir en god og skjematisk oversikt over forholdet mellom undervisningsmetoder og læringsutbytte. I Grønmo & Bergem (2009) understrekes det at «ulike undervisnings-/arbeidsformer gir forskjellig læringsutbytte. Dersom elevene skal lykkes med å utvikle en bred og sammensatt matematikkfaglig kompetanse, inklusive positive holdninger til faget, er det viktig at læreren benytter varierte arbeidsformer i sine undervisningsopplegg» (s. 41–42).

Forskning på matematikkundervisning i norsk grunnskole, enten den har vært basert på TIMSS-data eller på klasseromsstudier som PISA+ (Bergem, 2009), har pekt på at matematikkundervisningen ofte har et monotont preg hvor teoretisk gjennomgang og individuelt arbeid med oppgaver fra læreboka dominerer. Data fra TIMSS Advanced gir muligheter til å undersøke om dette bildet samsvarer også med matematikkundervisningen i videregående skole. Dette utgjør en viktig del av resultatene som presenteres og diskuteres, spesielt i kapitlene 8, 9 og 11.

Lærerens rolle i matematikktimene har vært gjenstand for både debatt og endringer i lys av konstruktivismen. Konstruktivistisk læringsteori synes ofte å ha blitt (mis)tolket i en retning som innebærer en tro på at elevene på egen hånd er i stand til å «konstruere» en hensiktsmessig matematiske kunnskap, og at den optimale måten å arbeide på derfor er at elevene i størst mulig grad jobber individuelt. En slik tolkning fører lett til at læreren trer tilbake og inntar en mer perifer rolle i klasserommet. Læreren framtrer i mindre grad som den faglige og pedagogiske lederen av en felles læringsarena, og blir mer en form for veileder og tilrettelegger av elevenes individuelle arbeid (Grønmo, 2010; Grønmo et al., 2004; Kjærnsli et al., 2004). En av grunnene til at individuelt arbeid har blitt en dominerende arbeidsmåte i norske matematikklasserom, kan altså være tolkningen av hva som ligger i en konstruktivistisk læringsteori. Den sterke vekten som i slik teori er lagt på at elevene selv konstruerer sin egen kunnskap, behøver ikke bety at elevene i størst mulig grad bør arbeide på egen hånd og at de lærer best når de er overlatt til seg selv.

Vygotsky (2001) er den kanskje mest innflytelsesrike teoretikeren innenfor sosialkonstruktivismen. Et av hans viktigste teoretiske begreper er *den nærmeste utviklingssonen* (på engelsk: *zone of proximal development*). Denne sonen er området av det en elev ikke kan gjøre på egen hånd, men som han/hun kan gjøre med hjelp av en voksen eller en viderekommen medelev. Alle elever har en slik potensiell utviklingssone, noe som innebærer at man med assistanse fra andre kan lære mer enn man kan gjøre på egen hånd. Dysthe (2007) understreker at dette betyr at dersom man bare lar elevene arbeide ut fra eget initiativ, eller tilpasser undervisningen til det nivået de allerede har nådd, gir man ikke elevene *optimale læringsmuligheter*! Elevene må stimuleres og motiveres til å strekke seg, og samspill med andre som kan mer vil da være helt nødvendig, hevder Dysthe.

Innenfor sosialkonstruktivismen, som i stor grad bygger på Vygotskys teorier, er videre *forhandling av mening* et sentralt begrep. Begrepet er særlig relatert til læringens sosiale aspekter. Voigt (1995) hevder at elever og lærere gjennom interaksjonen i klasserommet forhandler seg fram til enighet både om meningsinnholdet i matematiske begreper og om hvilken type argumentasjon som skal anses for å være gyldig i matematikk. Ifølge sosialkonstruktivistisk læringsteori kan man derfor si at læreren har en viktig posisjon gjennom for eksempel å konfrontere elever med opplysninger og faglig informasjon som «forstyrrer» deres eventuelle misoppfatninger av matematiske begreper og sammenhenger. Lærerens oppgave som leder av den felles læringsarenaen i klassen blir blant annet å stimulere elevene til å utvikle og korrigere sin matematiske begrepsforståelse.

Innenfor sosiokulturell læringsteori, som også bygger på Vygotskys ideer, kommer lærerens viktige rolle i klasserommet kanskje enda tydeligere fram. Læreren skal ifølge denne læringsteorien være den personen som sørger for at kommunikasjonen i klasserommet og elevenes faglige begrepsforståelse knyttes an til det som regnes for å være matematisk anerkjente begreper og posisjoner (Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2006). De matematiske symbolene, begrepene og reglene er typiske eksempler på artefakter som konstitueres innenfor et større sosialt univers, og overlatt til seg selv vil elever ha liten mulighet til å utvikle en adekvat matematisk begrepsforståelse. Læreren skal gjennom sine vurderinger i klasserommet tilkjennegi hvilken type matematisk forståelse som harmonerer med den historisk og sosialt utviklede matematikken. Van Oers (2000) påpeker at dette ofte kommer klart til syne i læreres evaluering av uttalelser i klasserommet. Dyktige lærere observerer elevenes aktiviteter, både muntlige og skriftlige, og vurderer noen som bra og andre som uriktige eller inadekvate. Vurderingene gjøres på grunnlag av lærerens oppfatninger av hva som utgjør matematikk og matematiske normer.

Ifølge sosialkonstruktivistisk så vel som sosiokulturell læringsteori er det viktig at læreren spiller en aktiv rolle i klasserommet og ikke bare innehar en uklar birolle. Hvis elevene i for stor grad overlates til seg selv, overser man de aspektene ved læring av matematikk som spesielt framheves innenfor sosiokulturell teori: læring av matematikk består i en utvidelse av elevenes evne til å delta i faglig relaterte samtaler. Denne evnen opptrenes særlig gjennom deltakelse i muntlige, matematikkfaglige samtaler i klassen (Sfard, 2000; Van Oers, 2000). Klasserommet som felles arena for læring framstår som en avgjørende faktor for hva elevene lærer i matematikk. Lærerens rolle blir å være en sterk og tydelig leder, faglig og pedagogisk, på denne arenaen.

I alle TIMSS-studier, både i grunnskolen og i videregående skole, har man spørreskjemaer til elever, lærere og skoleledere. De gir data som er velegnet til å få informasjon om undervisningsrelaterte faktorer i skolen. Det gjelder for eksempel hvor mye man bruker individuelle arbeidsformer og i hvilken grad det legges opp til diskusjoner og refleksjoner rundt faglige temaer i matematikktimene. I mange tilfeller får elever og lærere likelydende spørsmål. Dersom svarene er sammenfallende, styrker det funnenes validitet. I en del tilfeller er det også spørsmål om de samme faktorene på ulike trinn, på 4. trinn i barneskolen, på 8. trinn i ungdomsskolen og i VK2 (Vg3) i slutten av videregående skole. Man har derfor data som sier noe om hvilke undervisningsmetoder som ser ut til å bli lite eller mye brukt i Norge, om det er de samme metodene som brukes på ulike trinn i skolen, og hvordan den norske profilen eventuelt er lik eller ulik den man ser i andre land. Ved å sammenlikne disse dataene med resultatene fra annen forskning får man da et relativt godt grunnlag for å gjøre analyser og trekke konklusjoner om hva som kjennetegner matematikk-undervisningen i Norge, både i et nasjonalt og i et internasjonalt perspektiv.

2.4 TIMSS som vurdering av norsk skole

Vurdering av elevenes læringsutbytte har blitt et sentralt område i skoleforskning, ikke minst påvirket av store internasjonale komparative studier som TIMSS, PIRLS og PISA. (PIRLS undersøker elevers leseferdigheter på 4. trinn.) Diskusjonen om vurdering dreier seg om både formål, innhold og form. Det er vanlig å sette vurdering *for* læring og vurdering *av* læring opp mot hverandre, på samme måte som man snakker om *formativ* og *summativ* vurdering. Dysthe (2008, s. 17) påpeker følgende:

> Det er viktig å vere klar over at desse distinksjonane handlar om *intensjonen* bak vurderinga og ikkje om ulike former for vurdering. Vurdering *for* læring betyr at vurderinga har som intensjon å skaffe informasjon som gjer undervisninga og rettleiinga betre, og som fremjar læring. Vurdering *av* læring (summativ vurdering) har som formål å gi ein karakter eller ein skåre og å rangere eller kvalifisere. Det er altså ikkje vurderingsforma eller teknikken i seg sjølv som er formativ eller summativ, men formålet bak og bruken av han.

Selv om dette refererer til vurdering i klasserommet av den enkelte elev, kan det være nyttig å bruke det som et utgangspunkt for å reflektere rundt TIMSS-studiene, da sett ut fra vurdering *av* læring eller vurdering *for* læring i et land.

Ser man på internasjonale komparative studier først og fremst som undersøkelser som skal plassere oss høyt eller lavt i prestasjoner sammenliknet med andre land, blir TIMSS et redskap for vurdering *av* læring i et land. Det har nok vært vanlig for mange å se på dette som det viktigste ved slike studier, og mye av kritikken har tatt et slikt utgangspunkt. Ser man på TIMSS som en studie som gir oss informasjon om *hvordan man kan få til bedre læring* i et land, blir det vurdering *for* læring som står sentralt. De som har vært tilhengere av slike studier, har ofte framhevet dette som den viktigste intensjonen for å delta i disse undersøkelsene. Siden det ikke er formen som bestemmer om vurderingen er *av* læring eller *for* læring, men intensjonen med den, blir det viktig å diskutere intensjonen med å delta i TIMSS-studien.

Mange anser altså TIMSS, PIRLS og PISA først og fremst som internasjonale studier som rangerer land ut fra elevenes faglige prestasjoner. Medieoppslag som særlig setter søkelyset på hvor dårlig Norge presterer i forhold til andre land, bidrar i stor grad til en slik oppfatning. Ser man derimot på mange av de forskningsrapportene som har blitt skrevet i etterkant av disse studiene, er søkelyset i hovedsak rettet mot hvordan resultatene fra studiene kan bidra til bedre læring for elever i norsk skole. Det ser ut til at også media etter hvert i større grad forholder seg til dette perspektivet, altså hva som skal til for å få til bedre læring i skolen.

TIMSS Advanced kan, som andre TIMSS-studier, gi ideer til oppgaver som kan brukes i vurdering av elever på en skole eller i en klasse. For hver studie offentliggjøres omtrent halvparten av oppgavene, mens de resterende holdes hemmelig for å brukes som trendoppgaver (se kapittel 12). Oppgavene i TIMSS har en gjennomgående høy kvalitet, de har blitt utviklet og utprøvd flere ganger før de brukes i den endelige studien. Men oppgavene har også sine klare begrensninger. Siden dette er en skriftlig test er det bare kunnskaper som egner seg for denne formen for testing som vurderes. I en undervisningssituasjon vil andre måter å vurdere kunnskaper på også ha sin naturlige plass; man vurderer kanskje muntlige prestasjoner eller besvarelser på større oppgaver som elever kan løse over tid. Mange av oppgavene i TIMSS egner seg imidlertid også til en diskusjon rundt matematiske begreper og sammenhenger i klassen.

Siden TIMSS er en internasjonal studie, er det dessuten andre begrensninger på hva som vurderes. Rammeverket til TIMSS Advanced er et kompromiss mellom alle deltakerlandene om hva som er viktig kunnskap i matematikk. Visse prioriterte aspekter i norsk læreplan vektlegges mindre i TIMSS Advanced enn i den norske læreplanen for 2MX og 3MX; spesielt gjelder det statistikk (se kapittel 12 for mer om dette).

På de områdene som TIMSS Advanced tester, har dataene meget høy kvalitet. Forskerne som gjennomfører studien, er imidlertid helt klare på at det er mange spørsmål om matematikkundervisning i skolen som TIMSS-studiene ikke kan gi svar på. Konsekvensen er at resultatene fra TIMSS Advanced i denne boka drøftes og relateres til resultater fra andre typer studier og vurderinger, både nasjonale og internasjonale. De blir også i stor grad relatert til tidligere forskningsresultater fra TIMSS i grunnskolen. I den grad man får et konsistent bilde som peker på de samme faktorene både på barnetrinn, på ungdomstrinn og i videregående skole, underbygger det at dataene gir et valid bilde av situasjonen i norsk skole. I denne boka henvises det til andre studier, ikke bare for å styrke eventuelle konklusjoner, men også for å kunne vurdere resultatene kritisk. TIMSS gir på enkelte områder meget gode data om matematikk i skolen, men kan ikke brukes til å vurdere alle sider ved et lands matematikkundervisning.

3 Prestasjoner fordelt på kompetansenivåer og fagområder

Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo

I dette kapittelet presenteres flere typer resultater som viser norske 3MX-elevers prestasjoner i matematikk. TIMSS Advanced har definert tre kompetansenivåer for prestasjoner: avansert nivå, høyt nivå og middels nivå. Prestasjoner som ikke når opp til middels nivå, har vi i denne boka valgt å betegne som lavt nivå. I den første delen av kapittelet blir fordelingen av de norske elevene på disse nivåene sammenliknet med de valgte referanselandene.

TIMSS Advanced 2008 rapporterer også hvor godt elevene i de deltakende landene presterer på tre matematiske områder: Algebra, Kalkulus og Geometri. På hvert av disse områdene blir norske elevers prestasjoner sammenliknet med elever i referanselandene. I siste del av kapittelet gis det en oversikt over hvordan norske elevers prestasjoner i matematikk har endret seg på alle de oppgavene som var identiske i 1998 og 2008.

3.1 Fordeling av elever på ulike kompetansenivåer

Et generelt bilde av norske elevers prestasjoner i matematikk ble presentert i kapittel 1. Der ble det understreket at det har vært en signifikant tilbakegang i matematikkprestasjonene til norske elever fra studien i 1998 til den i 2008. Sammen med Sverige har Norge den største tilbakegangen i prestasjoner fra den første studien. Det samsvarer godt med resultatet i fysikk i TIMSS Advanced (Lie, Angell & Rohatgi, 2010; Mullis et al., 2009). Resultatet samsvarer også med utviklingen av elevprestasjoner i TIMSS-studiene i grunnskolen, som viste en markert tilbakegang i matematikkprestasjoner for norske elever fra 1995 til 2003. Riktignok var det en viss framgang i de norske prestasjonene fra 2003 til 2007, men norske elevers prestasjoner i matematikk på 8. trinn var fortsatt lavere enn det de var i 1995. Her bør man merke seg at det er samme årskull elever som ble undersøkt på 8. trinn i grunnskolen i 2003, som nå er undersøkt i TIMSS Advanced i 2008. Dette gir grunn til ettertanke. Svake forkunnskaper fra ungdomstrinnet forplanter seg som regel oppover i videregående opplæring. Analyser av karakterstatistikker viser at det er sterk sammenheng mellom elevenes karakterer i matematikk i grunnskolen og det de oppnår i videregående skole (Hægeland, Kirkebøen & Raaum, 2005). Det betyr imidlertid ikke at man kan legge alt ansvaret for svake resultater i videregående skole på grunnskolen. Årsakene til den tilbakegangen vi ser i TIMSS Advanced er nok mer komplekse; de kan også ha noe å gjøre med faktorer som undervisningsmåter og arbeidsformer i den videregående skolen. Det kommer vi tilbake til i kapitlene 8 og 9 som ser nærmere på det som i TIMSS Advanced kalles den implementerte læreplan, det vil si det som i særlig grad har med undervisning og lærere å gjøre. (I kapittel 2 er det redegjort for læreplanbegrepet i TIMSS.) I kapittel 11, hvor en del viktige resultater settes inn i en bredere forsknings- og skolesammenheng, drøfter vi også noe av dette.

TIMSS Advanced benytter en standardisert poengskala med et gjennomsnitt på 500 poeng og et standardavvik på 100. Skalaen ble definert i 1995 og kan – ved hjelp av trendoppgavene som er brukt begge ganger – brukes på nytt i 2008 til å angi elevenes generelle prestasjonsnivå i matematikk. (Se kapittel 1 som har en kort beskrivelse av bruken av standardisert gjennomsnitt i TIMSS Advanced, og kapittel 12 som omhandler rammer, metoder og gjennomføring av studien.) TIMSS Advanced har også utviklet et system for å beskrive hvilken type kompetanse elever har når de oppnår et visst antall poeng (Mullis et al., 2009). Som kritiske poengnivåer (på engelsk *benchmark levels*) har man valgt 625, 550 og 475. De benevnes som henholdsvis *avansert nivå* (625), *høyt nivå* (550) og *middels nivå* (475). Til hvert av disse kompetansenivåene har man valgt ut noen oppgaver for å eksemplifisere hvilke kunnskaper en typisk elev på dette nivået kan antas å ha. Hver av de frigitte oppgavene blir presentert og drøftet i etterfølgende kapitler: algebraoppgaver i kapittel 4, kalkulusoppgaver i kapittel 5 og geometrioppgaver i kapittel 6. Der blir det også påpekt hvilke av oppgavene som eksemplifiserer de tre kompetansenivåene.

For enkelhets skyld har vi i denne boka valgt å omtale prestasjoner som ikke når opp til middels nivå ved å si at de ligger på *lavt nivå*. Dette er ikke et nivå som er beskrevet internasjonalt.

3.1.1 Kompetansenivåene i matematikk i TIMSS Advanced

Tabell 3.1 beskriver kompetansene for de tre nivåene i TIMSS Advanced (Mullis et al., 2009, vår oversettelse). Generelt kan elever på middels nivå løse rutinepregede oppgaver innen områdene algebra, kalkulus og trigonometri. Elever på høyt kompetansenivå kan i tillegg løse ikke-rutinepregede flertrinnsoppgaver innen disse tre emneområdene. På avansert nivå kan elevene dessuten resonnere seg fram til løsninger på mer komplekse matematiske problemer. Beskrivelsen av nivåene er kumulativ, det vil si at elever på høyt eller avansert nivå også har de kompetansene som kjennetegner de lavereliggende nivåene.

Tabell 3.1 Beskrivelser av de tre kompetansenivåene i matematikk i TIMSS Advanced.

Avansert nivå (625 poeng)
Sammendrag Elevene viser begrepsforståelse og behersker prosedyrer. De demonstrerer evne til å gjennomføre resonnementer i algebra, trigonometri, geometri og differensial- og integralregning, og bruker dette til å løse problemer i komplekse situasjoner.
I algebra kan elevene løse tekstoppgaver som involverer permutasjoner og geometriske følger, samt løse logaritmiske likninger. De kan finne summen av uendelige geometriske rekker, og viser noe evne til å arbeide med komplekse tall. I kalkulus demonstrerer elevene en forståelse for begrepet integrasjon, og viser at de kan integrere eksponentialfunksjoner, gjenkjenne forholdet mellom et bestemt integral og arealet under en funksjonsgraf, og løse problemer som involverer areal mellom kurver. Ved å studere grafen til en funksjon kan de identifisere punkter der funksjonen ikke er deriverbar. Elevene kan bestemme maksimums-, minimums- og vendepunkter for en funksjon ved å analysere grafen til den deriverte, eller ved å bestemme den første- og andrederiverte av funksjonen. De kan løse problemer i kinematikk, og finne den maksimale verdien av en størrelse under gitte forutsetninger. Elevene kan resonnere geometrisk for å løse problemer. De kan bruke trigonometriske forhold til å løse praktiske problemer som ikke er rutinepreget for dem, og i forbindelse med trigonometriske funksjoner viser de kjennskap til begrepene periode og amplitude. Elevene kan bruke vektorsummer og -differanser til å uttrykke en sammenheng mellom tre vektorer. I det kartesiske planet kan de avgjøre om to linjer er parallelle, vise at diagonalene til en gitt firkant halverer hverandre, og finne det geometriske stedet for punkter som oppfyller en gitt betingelse.
Høyt nivå (550 poeng)
Sammendrag Elevene kan bruke sin kjennskap til matematiske begreper og prosedyrer i algebra, kalkulus, geometri og trigonometri for å analysere og løse både rutinepregede og ikke-rutinepregede flertrinnsoppgaver.

Elevene kan løse algebraoppgaver som krever analytiske ferdigheter, inkludert oppgaver satt i en praktisk kontekst og oppgaver som krever tolkning av informasjon relatert til funksjoner og tilhørende grafer. De kan bestemme et ledd i en geometrisk følge, sammenlikne to enkle matematiske modeller, løse kvadratiske ulikheter, og analysere en foreslått løsning av en enkel logaritmelikning. I kalkulus kan elevene analysere egenskapene til en funksjon og dens graf ved å se på fortegnet til den første- og andrederiverte av funksjonen. De kan derivere funksjoner som inneholder rottegn. Elevene kan finne bestemte og ubestemte integraler av enkle rasjonale funksjoner. I geometri kan elevene bruke grunnleggende egenskaper ved trigonometriske funksjoner til å identifisere løsninger av enkle trigonometriske likninger og bestemme høyde ut fra vinkelen til siktelinja. De kan identifisere likningen for en linje eller sirkel i det kartesiske planet, og bruke linjers stigningstall i problemløsing. De kan bruke egenskaper ved vektorer til å analysere ekvivalens av utsagn som involverer summen og differansen av to vektorer.
Middels nivå (475 poeng)
Sammendrag Elevene kan bruke sin kjennskap til begreper og prosedyrer i algebra, kalkulus og geometri for å løse rutinepregede oppgaver.
Elevene kan utføre grunnleggende algebraiske operasjoner, blant annet kan de løse likninger og ulikheter, og forenkle polynomuttrykk og rasjonale uttrykk. De kan bestemme fortegnet til en rasjonal funksjon og finne uttrykket til en sammensatt funksjon i enkle tilfeller. I kalkulus viser elevene en forståelse for begrepet kontinuitet, og for grenseverdien av en rasjonal funksjon. De kan derivere enkle rasjonale, eksponentielle og trigonometriske funksjoner. Elevene kan se sammenhengen mellom grafen til en funksjon og den deriverte av funksjonen. De bruker kjennskap til grunnleggende egenskaper ved geometriske figurer og ved det kartesiske planet til å løse oppgaver. Elevene kan addere og subtrahere vektorer på koordinatform. De kan tegne en avbildning av en polygon som speiles om en akse, og identifisere figuren som tegnes når en linje roterer i rommet.

Dette er de tre nivåene som er definert og beskrevet internasjonalt i TIMSS Advanced. Strengt tatt er altså nivåene knyttet til spesifikke poengsummer. Dersom en elev for eksempel har skåret 530 poeng, skulle vi derfor ha sagt at han eller hun ligger «mellom middels og høyt nivå». Dette er altså en elev som har nådd middels nivå, men ikke høyt nivå. For enkelhets skyld vil vi i det følgende si at en slik elev er på middels nivå. Da tenker vi altså på kompetansenivåene som intervaller.

Dersom en elev skårer lavere enn 475 poeng – altså ikke har nådd middels kompetansenivå – sier vi i denne boka at eleven har prestert på *lavt nivå*. Dette er ikke et nivå som er definert og beskrevet internasjonalt. Tabell 3.2 antyder hva dette nivået rommer.

Tabell 3.2 Kort beskrivelse av lavt kompetansenivå.

Lavt nivå (mindre enn 475 poeng)
Elevene har ikke nådd middels nivå. Det kan for eksempel bety at de ikke kan utføre grunnleggende algebraiske operasjoner, at de ikke kan derivere enkle funksjoner eller at de ikke kan addere og subtrahere vektorer på koordinatform.

Nivåene oppfattes altså i denne boka som intervaller:

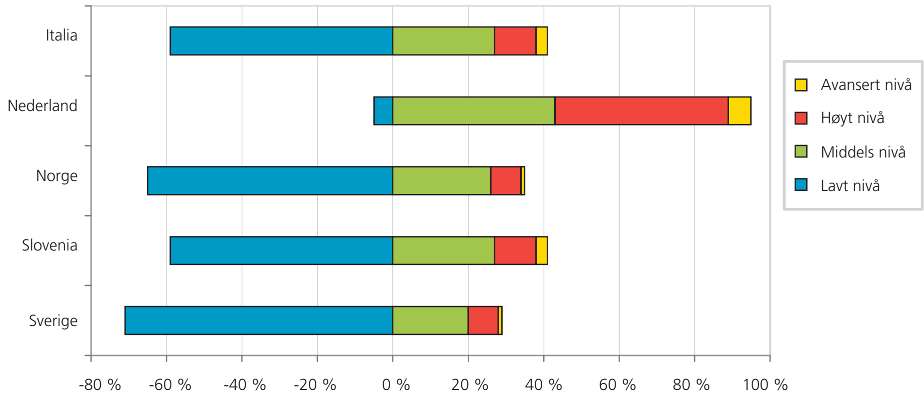
Avansert nivå:	[625, →⟩
Høyt nivå:	[550, 625⟩
Middels nivå:	[475, 550⟩
Lavt nivå:	⟨←, 475⟩

Dermed ligger enhver deltaker i TIMSS Advanced på et veldefinert kompetansenivå, og vi kan studere hvordan et lands deltakere fordeler seg på disse fire nivåene.

3.1.2 Fordeling av elevene på de ulike kompetansenivåene

Figur 3.1 viser hvordan elevene fordeler seg på de fire kompetansenivåene i Norge og i de valgte referanselandene. (Se kapittel 1 om begrunnelse for valg av referanseland.) Feilmarginen[1] på disse målingene er mellom 0,8 og 6,0 prosentpoeng. Bare 1 % av de norske elevene når avansert nivå, og hele 65 % av dem ligger på lavt nivå. Fordelingen på kompetansenivåer er ganske lik i Sverige og Norge, med helt lik prosentandel på avansert og høyt nivå, men prosentandelen svenske elever som når opp til middels nivå er 6 prosentpoeng lavere enn i Norge. Italia og Slovenia har helt lik fordeling på alle nivåene. Tatt i betraktning at 20 % av årskullet tar avansert matematikk i Italia og vel 40 % i Slovenia, mot henholdsvis 11 % og 13 % i Norge og Sverige, framstår resultatet for de skandinaviske landene som bemerkelsesverdig svakt. Av referanselandene gjør Nederland det klart best, men siden det der bare er 3,5 % som tar avansert matematikk i det siste året i videregående skole, framstår faget som langt mer elitepreget i Nederland enn i Norge og i de andre referanselandene.

1 Feilmarginen er satt til to standardfeil. Det vil si at den virkelige andelen elever på det gitte kompetansenivået (hvis vi hadde testet hele populasjonen) med 95 % sannsynlighet ligger innenfor den målte verdien ± feilmarginen.



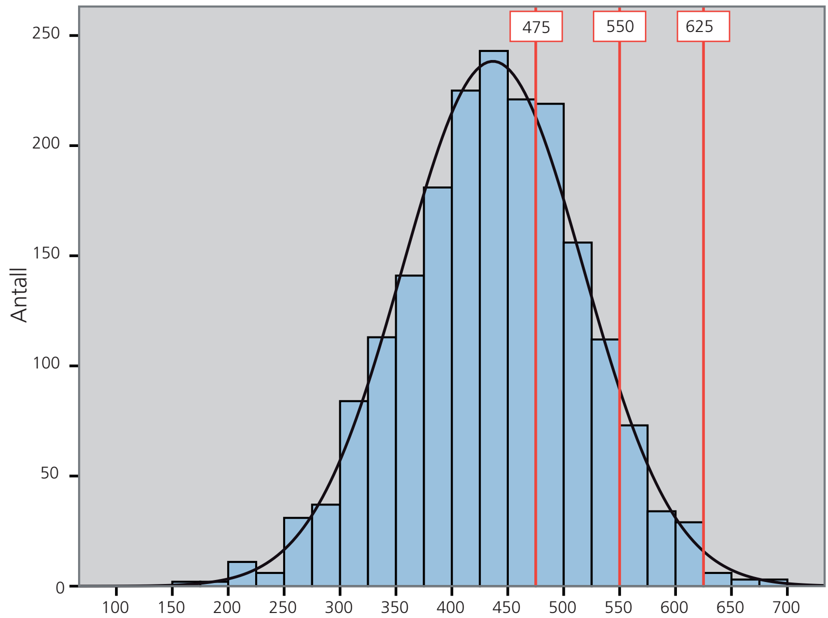
Figur 3.1 Fordelingen av elevene på kompetansenivåene i matematikk i TIMSS Advanced. Prosentandeler til høyre for null angir hvor mange prosent av elevene på kurset som når de internasjonalt definerte nivåene i TIMSS Advanced. Prosentandeler til venstre for null angir hvor mange prosent av elevene på kurset som ligger under laveste definerte kompetansenivå, altså på det vi har kalt lavt nivå.

Det norske resultatet samsvarer godt med tilsvarende resultater i TIMSS 2007 for elever på 4. og 8. trinn i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009). Det var få av de norske grunnskoleelevene som nådde høyt kompetansenivå og nesten ingen kom på avansert nivå, mens mange norske elever lå på lavt nivå eller under lavt nivå i grunnskolen. (I TIMSS var det definert et *lavt nivå* i tillegg til de tre som brukes i TIMSS Advanced, jamfør 3.1.1 ovenfor. Elevene kunne derfor prestere *under lavt nivå* i TIMSS 2007.)

Rapporten for TIMSS 2007 i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009) stilte spørsmål om hva norsk skole gir til de faglig sterke elevene. Den pekte videre på at det kan synes som om tilpasset opplæring, som i Norge har hatt en framtredende plass i læreplaner og i skoledebatter, i liten grad har ført til tilrettelagt undervisning for de elevene som kan gjøre det godt i et fag som matematikk. Det kan virke som om det er et generelt trekk på alle nivåer i norsk skole at man i liten grad stimulerer faglig sterke elever. Samtidig ser det ikke ut til at man i noen særlig grad har lykkes når det gjelder å gi god hjelp til de som sliter faglig heller.

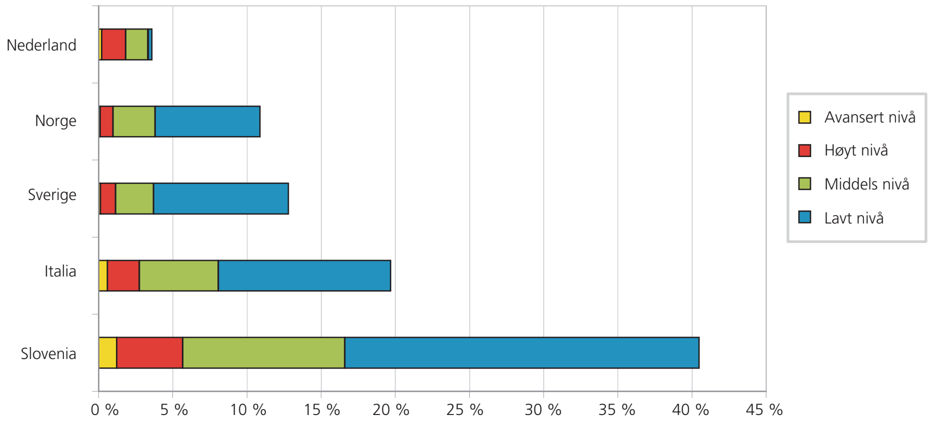
Det er også naturlig å drøfte resultatene til 3MX-elevene ut fra den tilbakegangen man tidligere har sett i grunnskolen. De svake resultatene for elever i norsk grunnskole kan være en medvirkende faktor til de svake resultatene vi nå ser i videregående skole. I kapittel 11, som oppsummerer de viktigste funnene fra studien og drøfter disse i en bredere skolepolitisk kontekst, kommer vi tilbake til dette. Der ligger det til rette for å drøfte forholdet mellom det elevene lærer i grunnskolen og det de skal lære i videregående skole. Resultater fra både TIMSS i grunnskolen og TIMSS Advanced i videregående skole kan bidra til en debatt om differensiert undervisning. Hvordan man skal lykkes med å differensiere undervisningen og gi alle elevene en tilpasset opplæring, synes å være en stor utfordring i norsk skole. Spørsmål rundt differensiering og tilpasset opplæring står sentralt i kapittel 11 og blir drøftet i lys av skolens læreplaner, både på det intenderte nivået, slik det er uttrykt i selve planen, og på det implementerte nivået, slik det fortolkes og framtrer i undervisning og organisering på skole- og klassenivå. (Se kapittel 2 for mer om de ulike nivåene i læreplanen.)

I tillegg til å studere fordelingen av de norske 3MX-elevene på kompetansenivåene i TIMSS Advanced er det interessant å se på en mer finmasket fordeling av prestasjonene deres. Figur 3.2 viser dette i et histogram. Hver søyle har en bredde på 25 poeng. På figuren er også den tilsvarende normalkurven tegnet inn. De norske prestasjonene viser en nesten perfekt tilpasning til normalfordelingen, men med en klar forskyving mot et jevnt svakere resultat i forhold til det skalerte gjennomsnittet på 500 poeng og i forhold til middels kompetansenivå som er definert til 475 poeng. Toppen for den norske fordelingen ligger i underkant av 440 poeng. Dette illustrerer at norske 3MX-elever på alle nivåer presterer jevnt over svakt i et internasjonalt perspektiv.



Figur 3.2 Fordelingen av de norske elevenes prestasjoner i 25 poengs intervaller mellom 150 og 700 poeng i TIMSS Advanced. De definerte kompetansenivåene er markert, og den tilsvarende normalfordelingskurven er tegnet inn.

I figur 3.1 er alle søylene like lange. Prosenttallene der angir andeler av den populasjonen som ble testet i TIMSS Advanced. Men som vi har sett i kapittel 1, utgjør disse populasjonene svært ulike prosentandeler av sine årskull i de forskjellige deltakerlandene. Det kan derfor være interessant å se hvordan fordelingen på kompetansenivåene er i prosent av hele årskullet i de enkelte landene. Figur 3.3 viser dette for Norge og de valgte referanselandene.



Figur 3.3 Fordelingen av elevene på kompetansenivåene i matematikk i TIMSS Advanced i prosent av hele årskullet.

Totallengden av den enkelte søylen viser prosentandelen av årskullet som er med i populasjonen som er testet, det vi kaller *dekningsgraden* (*Coverage Index*), og som er oppgitt i figur 1.1. Differansen mellom 100 % og lengden av søylen viser derfor hvor mange prosent av årskullet som ikke tar avansert matematikk i det enkelte land.[2]

Se for eksempel på avansert kompetansenivå i de fem landene som er med i figurene 3.1 og 3.3. I figur 3.1 er det klart at Nederland har størst prosentandel på dette nivået. Men siden Nederland har liten dekningsgrad, utgjør likevel elevene på avansert nivå en svært liten prosentandel av hele årskullet, slik figur 3.3 viser. Figur 3.3 viser tydelig at det er Slovenia som har den største prosentandelen av årskullet på dette nivået. Samme resultat får vi om vi ser på høyt kompetansenivå. Dette gir grunnlag for å hevde at Slovenia er det av disse fem landene som klart produserer flest høykompetente matematikere i videregående skole, sett i forhold til befolkningsstørrelsen.

2 Figur 3.3 og tilsvarende data må tolkes med forsiktighet. Land med lav dekningsgrad og høy skår i TIMSS Advanced (som Russland og Nederland) kan ha definert populasjonen som skal undersøkes i TIMSS Advanced som elevene som tar et eller flere små, elitepregede matematikkurs. Det kan godt tenkes at et slikt land har andre «nest-beste» kurs som også er ganske avanserte og som tas av mange flere elever. Hadde disse elevene vært inkludert i TIMSS Advanced-undersøkelsen, ville dekningsgraden til landet blitt høyere, samtidig som landets gjennomsnittsskår trolig ville sunket noe.

Like tydelig er det at Norge og Sverige ligger dårligst an blant de fem landene. Disse to landene har aller færrest elever på avansert eller høyt nivå relativt til størrelsen på årskullet. Om figur 3.1 skapte bekymring for situasjonen i de skandinaviske landene, er figur 3.3 ikke mindre urovekkende.

Nå må vi være klar over at det kan være andre matematikkurs som gis til elever i slutten av videregående skole, og som ikke har blitt definert som avansert matematikk i et land, og som derfor ikke har vært med i undersøkelsen. Disse resultatene vil derfor være forbundet med en viss usikkerhet. For eksempel har vi ikke definert 3MZ som avansert matematikk i Norge, da læreplanen for 3MZ ble vurdert til å være for lite i samsvar med rammeverket som ligger til grunn for TIMSS Advanced.

3.2 Prestasjoner på emneområder i matematikk

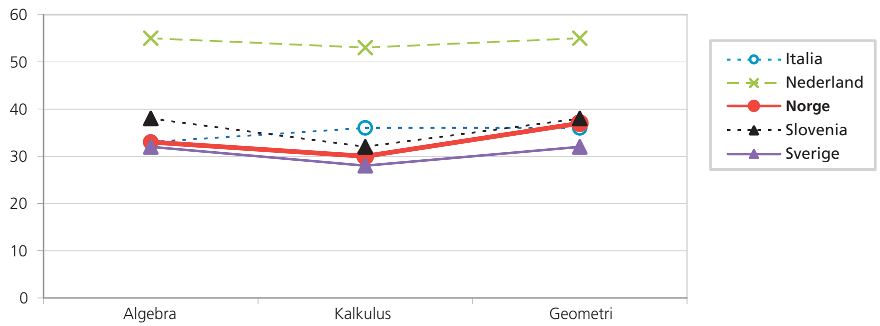
TIMSS Advanced har i 2008 tre faglige rapporteringsområder i matematikk:

- Algebra
- Kalkulus
- Geometri

I 1995 var det med en del oppgaver i sannsynlighet og statistikk. Disse var imidlertid ikke mange nok til å skille dem ut som en egen kategori som det kunne rapporteres reliabelt om. For studien i 2008 måtte man derfor gjøre et valg, enten utvide kategorien eller sløyfe den. Det siste ble valgt av flere grunner; se mer om dette i kapittel 12. TIMSS Advanced 2008 har derfor ikke med oppgaver i statistikk. Noen få oppgaver i kombinatorikk og sannsynlighet er tatt med under området Algebra.

Dette valget kan oppfattes som litt uheldig, sett med norske øyne. Læreplanene i 2MX og 3MX inneholdt mye statistikk. Det var dessuten disse oppgavene norske elever stort sett gjorde det best på i 1998 (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999). En kan derfor tenke seg at dersom statistikk hadde vært med som emneområde i 2008, ville kanskje de norske elevene ha prestert litt bedre. På den annen side passer rammeverket heller ikke fullt ut i de andre deltakerlandene. Det er for eksempel land som ikke har noe særlig i sin læreplan om regning med vektorer. I TIMSS Advanced har man arbeidet seg fram til en konsensus om hva som er viktig kunnskap som det er naturlig å ha med i en test av avansert matematikk på dette nivået, men alle land må inngå kompromisser om hva som skal være med og ikke, sett i forhold til landenes egne læreplaner. For mer om dette, se kapittel 12.

Figur 3.4 viser gjennomsnittlig andel riktige svar innenfor hvert av de tre emneområdene i Norge og i referanselandene. Feilmarginen ligger mellom 1 og 3 prosentpoeng.



Figur 3.4 Gjennomsnittlig prosent riktige svar innenfor hvert emneområde i TIMSS Advanced.

Vi ser en viss tendens til at elevene presterer svakest i Kalkulus og best i Geometri. Blant alle de ti deltakerlandene er det slik at åtte presterer svakest i Kalkulus og seks presterer best i Geometri. Et unntak er Italia, der elevene presterer relativt godt i Kalkulus. Slike variasjoner kan avspeile forskjellig vektlegging av de ulike emneområdene i landenes læreplaner. Figur 8.6 i kapittel 8 viser at Italia bruker markert mer undervisningstid på Kalkulus enn det de andre landene gjør.

De norske og svenske elevene presterer svakt på alle områdene, de svenske elevene aller svakest blant referanselandene. Disse resultatene reiser mange problemer som det er verdt å reflektere over. TIMSS-rapporten om grunnskolen fra 2007 (Grønmo & Onstad, 2009) stilte spørsmål om det ble lagt så mye vekt på praktisk, anvendt matematikk i grunnskolen at det gikk ut over elevenes læring av mer abstrakt, ren matematikk som tall og algebra. Hvilken betydning dette kan ha for elevenes prestasjoner i videregående skole, er en del av drøftingen i kapittel 11. Vi henviser her også til kapittel 2 som redegjør mer om forholdet mellom ren og anvendt matematikk. TIMSS 2007-rapporten pekte blant annet på problemet med at vi i stor grad har nedprioritert algebra i norsk grunnskole. I et internasjonalt perspektiv var de norske elevenes prestasjoner i algebra så svake at en debatt rundt vår generelle nedprioritering av dette emneområdet ble etterlyst (ibid.). Det ble videre understreket at mangelfull forståelse og ferdighet i algebra vil kunne gi elever som sikter seg inn mot yrker som forutsetter gode kunnskaper i matematikk, store problemer. Om dette ikke er nødvendig kunnskap for alle elever, kan det ha en avgjørende betydning for de man ønsker å rekruttere til yrker som krever relativt høy kompetanse i matematikk (ibid.).

Samme rapport refererte også til evalueringen av ingeniørutdanningene i Norge, gjennomført av NOKUT (Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen, www.nokut.no) i 2008. NOKUT påviste et betydelig problem med frafall av studenter. Av de studentene som begynte høsten 2003, var det bare 44 % som fikk vitnemål etter tre år. NOKUT trakk fram dårlige kunnskaper i matematikk som en viktig forklaringsfaktor for frafallet. De skrev eksplisitt i rapporten sin at «Matematikken er en spesielt stor utfordring» (NOKUT, 2008, s. 49). De anbefalte at man burde gjennomgå innholdet i og kravene til matematikk i videregående skole, og at man hevet minimumskravene til matematikkarakterer for opptak til ingeniørstudiet ved enkelte institusjoner. Særlig ble solide kunnskaper i algebra pekt på som viktig for de som skal inn i slike og tilsvarende yrker. Men – som allerede påpekt tidligere i boka – skoleløpet henger sammen; det elever lærer eller ikke lærer i grunnskolen vil ha betydning for hvor godt de presterer i videregående skole. Resultater i TIMSS Advanced, både i matematikk og fysikk (Lie, Angell og Rohatgi, 2010), peker på at norske elever synes å mangle grunnleggende ferdigheter i matematikk på områder som tall og algebra.

Strategidokumentet *Realfag for framtida* fra Kunnskapsdepartementet nevner også NOKUTs evaluering av ingeniørutdanningene og legger til:

> Samtidig opplever mange studenter matematikkfaget som spesielt krevende, og høy strykprosent i faget fører både til økt frafall og lavere studieprogresjon. (KD, 2010, s. 22)

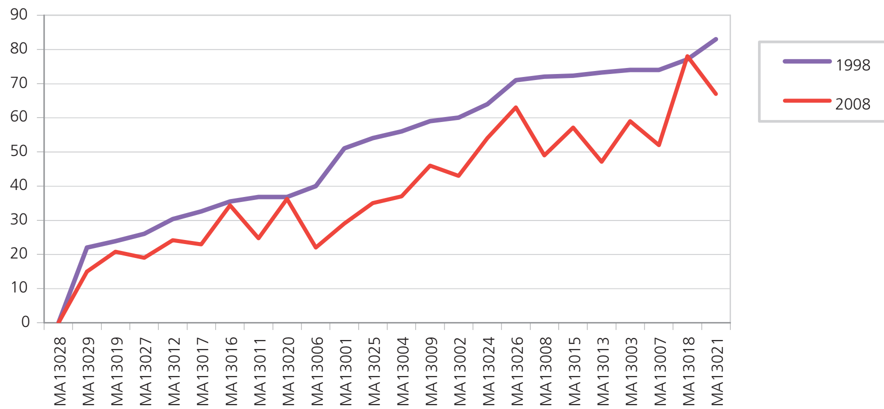
I denne sammenheng passer det også å nevne Norsk matematikkråds undersøkelser av grunnleggende matematisk kunnskap hos studenter som begynner på matematikkrevende studier i Norge (http://matematikkradet.no/nmrtest.html). Matematikkrådet har gjennom en periode på over 20 år undersøkt begynnerstudenter på studier som krever en del matematikk, for eksempel realfag, ingeniørfag, data, økonomi og lærerutdanning. De har testet faktakunnskaper og ferdigheter i grunnleggende matematikk, blant annet tallregning på ungdomsskolenivå. Tilbakegangen har vært markant, fra en gjennomsnittlig skår på 73 % i 1984 til 47 % i 2007. Et dramatisk eksempel er følgende oppgave:

> På Dahl skole er det 135 jenter og 115 gutter. Hvor mange prosent av elevene er jenter? (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten, 2007, s. 14)

Dette er en helt grunnleggende prosentoppgave. Skårprosenten på denne oppgaven har i samme tidsrom gått ned fra 84 % til 38 %. Studentenes feil skyldes dels at de ikke behersker prosentbegrepet, dels at de ikke behersker tallregningen. Dette er nok et eksempel på at norske studenter som trenger matematikk, mangler helt grunnleggende kunnskaper og ferdigheter. I drøftingen i kapittel 11 står slike spørsmål sentralt.

3.3 Prestasjoner på trendoppgavene i 1998 og 2008

Gode trenddata forutsetter at elevene i de populasjonene som undersøkes i to studier, får et tilstrekkelig antall identiske oppgaver i begge studiene. Det er viktig at disse oppgavene er helt identiske, siden selv relativt små endringer i en oppgave har vist seg å kunne gi store utslag på hvor vanskelig eller lett oppgaven faller ut (Olsen, Turmo & Lie, 2001). I TIMSS hemmeligholder man derfor en del oppgaver for å kunne bruke dem i senere undersøkelser. Slike *trendoppgaver* går altså igjen fra en undersøkelse til den neste og gjør at man i alle TIMSS-studiene har gode forutsetninger for å uttale seg om utvikling over tid, både i grunnskolen og på videregående skole. Figur 3.5 viser endringen i de norske 3MX-elevenes prestasjoner på alle de oppgavene som var med i studiene i både 1998 og 2008. Prestasjonene er målt i prosentandelen av elevene som svarte riktig på hver oppgave. Oppgavene er ordnet etter synkende vanskegrad i 1998.



Figur 3.5 Prosentandelen av norske 3MX-elever som fikk riktig på de oppgavene som var identiske i 1998 og 2008 (trendoppgavene).

Det er slående hvor entydig resultatet er; norske elever presterer svakere i 2008 enn i 1998 på nær sagt samtlige av disse trendoppgavene. Som påpekt tidligere er det noe større usikkerhet i de norske 1998-dataene siden den undersøkelsen ble gjort som en egen nasjonal studie tre år etter den internasjonale studien i 1995 (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999). Det vil derfor være noe større tilfeldighet og målefeil i norske data fra 1998, men det helt entydige resultatet for samtlige oppgaver gjør at man likevel med stor grad av sikkerhet kan trekke konklusjoner.

I de neste tre kapitlene blir frigitte oppgaver, både trendoppgaver og andre, presentert og resultatene drøftet. For trendoppgavene blir resultatene for de norske elevene i både 1998 og 2008 presentert og kommentert.

3.4 Noen avsluttende kommentarer

Resultatene i matematikk i TIMSS Advanced har – både når det gjelder prestasjonene i 2008 og når det gjelder utviklingstrekkene over tid – flere slående likheter med hva vi har observert i flere TIMSS-undersøkelser i grunnskolen siden midten av 1990-tallet, og også med PISA-undersøkelsene.

For det første har elevene gått fra å prestere i nærheten av det internasjonale, standardiserte gjennomsnittet til å prestere signifikant lavere enn dette.

For det andre har Norge nesten ingen elever som presterer på avansert kompetansenivå i matematikk og svært få på høyt nivå. Til gjengjeld er det svært mange som presterer under middels nivå. Dette kan tolkes som om norsk skole i liten grad har lykkes med sin sterke målsetting om tilpasset undervisning. Det ser ikke ut til at flinke elever får hjelp til å utvikle sitt potensial, men det ser heller ikke ut til at elever som strever med faget, får tilstrekkelig hjelp til å forbedre seg.

Flere likhetstrekk mellom situasjonen for matematikkfaget i grunnskolen og i videregående skole blir påpekt i andre kapitler i denne boka, og blir drøftet mer helhetlig i kapittel 11.

4 Prestasjoner på oppgaver i Algebra

Hovedforfatter: Ida Friestad Pedersen

I dette kapittelet presenteres resultatene for de frigitte oppgavene i området Algebra i TIMSS Advanced 2008. For flervalgsoppgaver angis det hvor stor prosentandel av elevene som valgte de ulike svaralternativene. Når det gjelder de åpne oppgavene, er disse kodet etter et internasjonalt skjema, der kodene forteller både om svaret er riktig eller galt, og hvilken type svar det er (for eksempel hvilken metode som er brukt i løsningen, eller hvilken feil som er begått). I presentasjonen av resultatene fra de åpne oppgavene gjengir vi ikke alle detaljene i kodeskjemaet, men beskriver sentrale trekk ved oppgaven og ulike kategorier av elevsvar sammen med en oversikt over hvor stor prosentandel av elevene som ga de ulike typene svar. Kodeskjemaene og prosedyrene for koding av de åpne oppgavene er nærmere beskrevet i kapittel 12.

For hver oppgave sammenliknes de norske elevenes prestasjoner med de valgte referanselandene. For trendoppgavene, det vil si oppgaver som var med både i 2008 og i 1995 (1998 i Norge), presenteres de norske resultatene fra begge disse studiene. Endringen i de norske elevenes prestasjoner er da en viktig del av drøftingen. Resultatene til de norske elevene relateres dessuten til læreplanen i 3MX og 2MX der det er relevant. For trendoppgavene er det aktuelt å trekke inn læreplanen både slik den opprinnelig var etter reformen i 1994, og slik den ble etter revisjonen i 2000.

Det er viktig å ha klart for seg at det kan være store variasjoner mellom resultater på enkeltoppgaver. Feilmarginene på prosentangivelsene i dette kapittelet er av størrelsesorden 5 prosentpoeng. Det tar vi hensyn til i kommentarene.

4.1 Emneområdet Algebra

Området Algebra i TIMSS Advanced omfatter hovedsakelig komplekse tall, følger og rekker, likninger og ulikheter, og ulike representasjoner av funksjoner (som symbolske uttrykk, grafer, tabeller og ordnede par). Elevene skal blant annet kunne bruke egenskapene til reelle og komplekse tall til å løse både praktiske og matematiske problemer, de skal kunne utforske grunnleggende egenskaper ved følger og rekker, og de skal vise evne til å arbeide med ulike typer likninger. For en nærmere beskrivelse av området Algebra i TIMSS Advanced henviser vi til studiens rammeverk (Garden et al., 2006).

I den norske læreplanen for 2MX kan man i mål 4 (Algebra og funksjonslære) lese at «Elevene skal kunne omforme ligninger og ulikheter og kunne regne med eksponential- og logaritmefunksjoner» (KUF, 2000), mens mål 3 (Rekker) i læreplanen for 3MX fastslår at «Elevene skal kunne regne med geometriske og aritmetiske rekker og kunne bruke dem til å løse praktiske problemer» (ibid.). Komplekse tall er ikke med i den norske læreplanen for MX-kursene, men med unntak av dette stemmer emneområdet Algebra i TIMSS Advanced godt overens med den læreplanen de norske 3MX-elevene har fulgt.

4.2 Algebraoppgavene

Innenfor emneområdet Algebra er 13 oppgaver frigitt, og 11 av dem drøftes og kommenteres i dette kapittelet. De to siste oppgavene omhandler induksjonsbevis og komplekse tall, temaer som ikke var dekket av den norske læreplanen. Disse oppgavene er formulert slik at det vanskelig lar seg gjøre å resonnere seg fram til riktig løsning uten å ha lært trinnene i et induksjonsbevis eller hva komplekse tall er. Vi har derfor valgt å utelate disse oppgavene fra denne presentasjonen, da det er svært begrenset hva de kan fortelle oss om norske elevers kompetanse. Oppgaver som er vurdert til å falle utenfor norsk læreplan er imidlertid tatt med når elevenes totalskår på testen beregnes. Det kan for alle deltakerlandene være enkelte oppgaver som ikke passer med deres læreplan. Analyser viser at dette ikke spiller noen stor rolle for elevenes totalprestasjoner. For utdypende informasjon, se kapittel 12.

Algebraoppgave 1 (MA23069)

En uendelig geometrisk rekke har $t_1 = 3$ som første ledd, og $t_3 = \frac{1}{3}$. Alle ledd i rekka er positive. Hva er summen av rekka?

Ⓐ $\frac{27}{8}$

Ⓑ $\frac{10}{3}$

Ⓒ $\frac{9}{4}$

Ⓓ $\frac{9}{2}$

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	13	13	5	10	10	10
B	20	46	42	25	17	27
C	11	8	8	8	6	8
D*	50	24	20	42	66	45
Ikke svart	6	9	25	15	2	11

Tabellen viser hvor mange prosent av elevene i et land som har valgt hvert av de fire svaralternativene, og hvor mange prosent som ikke har svart på oppgaven. Dette var ikke en trendoppgave; den var ny i 2008-undersøkelsen.

Dette er en flervalgsoppgave i emneområdet Algebra, i underkategorien følger og rekker. Elevene får oppgitt første og tredje ledd i en uendelig geometrisk rekke, og de blir bedt om å finne summen av rekka gitt at alle ledd er positive. Summen av en konvergent uendelig geometrisk rekke med første ledd a og konstant kvotient r er gitt ved $\frac{a}{1-r}$, og dette er en av de matematiske formlene som er oppgitt foran i oppgaveheftet. For å løse denne oppgaven må elevene vite hva en geometrisk rekke er og kunne bestemme kvotienten r, men de behøver ikke huske formelen for summen av en konvergent rekke. Riktig svar er alternativ D, som derfor er markert med stjerne og farge i tabellen.

Med en internasjonal løsningsfrekvens på 45 % faller dette ut som en middels vanskelig oppgave. Som tabellen viser, presterer norske elever noe over det internasjonale gjennomsnittet og bedre enn alle referanselandene med unntak av Nederland. Å kunne regne med uendelige geometriske rekker er et av hovedmomentene i læreplanen for matematikk 3MX (KUF, 2000, 3MX delmål 3b), og denne oppgavetypen bør være velkjent for de norske elevene.

I alle land er alternativ B det vanligste feilsvaret på denne oppgaven. Dette er svaret man får hvis man ganske enkelt finner summen av de to oppgitte leddene istedenfor summen av rekka. Det er mulig at elever som velger dette alternativet ikke vet hva en geometrisk rekke er, men man kan også tenke seg at en del elever kan ha lest oppgaven dårlig. Sverige og Italia utmerker seg ved at deres elever presterer langt under det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven, og ved at feilsvaret B velges mye oftere av deres elever enn det riktige svaralternativet. Det er også 25 % av de italienske elevene som valgte å ikke svare på denne oppgaven. Det viser seg at aritmetiske og geometriske rekker ikke er dekket i læreplanen til de italienske elevene (Mullis et al., 2009), noe som kan forklare hvorfor de velger å finne summen ved å legge sammen de to gitte tallene. Tilsvarende gjelder imidlertid ikke for de svenske elevene; aritmetiske og geometriske rekker er dekket i deres læreplan.

Algebraoppgave 2 (MA23004)

Et 0,01 cm tykt papirark deles i to. Den ene delen legges oppå den andre. De to arkene deles i to og legges sammen til en bunke på 4 ark. Hvis denne prosessen gjentas 8 ganger til, hvor tykk vil da bunken være?

Ⓐ 0,2 cm

Ⓑ 10,24 cm

Ⓒ 20,48 cm

Ⓓ 32,0 cm

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	17	15	22	21	3	14
B*	54	58	39	52	82	50
C	10	13	8	12	9	11
D	12	8	13	11	3	13
Ikke svart	7	7	19	5	4	13

I likhet med forrige oppgave er dette en flervalgsoppgave i underkategorien følger og rekker. I oppgaven beskrives en prosess der antallet papirark i en bunke fordobles et gitt antall (10) ganger. Elevene får vite at arkene er 0,01 cm tykke, og blir bedt om å finne tykkelsen til den endelige papirbunken. Oppgaven kan løses ved å betrakte dette som en geometrisk følge med første ledd $a = 0{,}01$, og konstant kvotient $r = 2$. Riktig svar (alternativ B) får man da ved å beregne ledd nummer 11 i følgen.

Igjen presterer de norske elevene noe bedre enn det internasjonale gjennomsnittet, som i dette tilfellet var på 50 %. De svenske og italienske elevene presterer bedre her enn på den forrige algebraoppgaven, og en mulig forklaring på dette kan være at formell kjennskap til geometriske følger og rekker ikke er nødvendig for å løse denne oppgaven. Man kan fint resonnere seg fram til svaret ved å fordoble tykkelsen av det første arket (0,01 cm) ti ganger.

En nærmere gjennomgang viser at 60 % av de norske guttene fikk til denne oppgaven, mot 44 % av jentene. Dette gjelder ikke bare de norske elevene; i alle referanselandene presterer guttene klart bedre enn jentene på denne oppgaven (forskjellen er minst i Nederland). Her kan vi også bemerke at forskjellen mellom guttenes og jentenes prestasjoner var mindre på forrige oppgave, som også dreide seg om geometriske følger og rekker. Algebraoppgave 2 peker seg altså ut som en «gutteoppgave». Det er viktig å påpeke at det ikke er signifikante kjønnsforskjeller i prestasjonene til de norske elevene når vi ser på totalskår for samtlige oppgaver (dette behandles mer inngående i kapittel 10). Likevel er det altså slik at man kan finne ganske store kjønnsforskjeller på enkeltoppgaver.

Nederland er for øvrig i en egen klasse på denne oppgaven, med hele 82 % riktige svar. Her kan det imidlertid påpekes at det i Nederland kun var 3,5 % av årskullet som ble regnet som «matematikkspesialister» (dekningsgrad, *Coverage Index*). Til sammenlikning var andelen matematikkspesialister i Norge 11 %, mens den i Slovenia var hele 41 % (Mullis et al., 2009). Nederland framstår altså som et elitistisk land når det gjelder skolens mer avanserte matematikkurs, noe som bør tas i betraktning når man sammenlikner landenes resultater. Det er tilsvarende grunn til å trekke fram at de slovenske elevene gjør det omtrent som det internasjonale gjennomsnittet, samtidig som Slovenia har en langt høyere andel matematikkspesialister enn alle de andre deltakerlandene.

Algebraoppgave 3 (MA13027)

En regulær mangekant med n sider er innskrevet i en sirkel med radius 1.

Finn grenseverdien til omkretsen av mangekanten når antall sider n går mot uendelig.

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
Riktig svar: 2π	35	19	20	24	10	68	27
Delvis riktig svar: $2\pi r$ eller $\lim\limits_{n\to\infty} 2n \sin\frac{\pi}{n}$	11	3	4	13	5	1	5
Galt svar	15	29	37	16	52	21	31
Ikke svart	39	49	40	48	34	10	37

Denne åpne oppgaven beskriver en regulær mangekant med n sider som er innskrevet i en sirkel med radius 1. Elevene blir bedt om å finne grenseverdien til omkretsen av mangekanten når n går mot uendelig. Flere lesere vil nok kjenne igjen dette som en forenklet versjon av Arkimedes' metode for å bestemme en tilnærmet verdi for π. Når antallet sider i mangekanten nærmer seg uendelig, vil omkretsen av mangekanten nærme seg omkretsen av sirkelen, og ved å beregne omkretsen av mangekanten kan man tilnærme $\pi = \frac{\text{omkrets}}{\text{sirkelens diameter}}$ (Arkimedes brukte både en innskrevet og en omskrevet 96-kant).

Oppgaven løses altså ved å innse at omkretsen til mangekanten nærmer seg omkretsen til sirkelen, slik at riktig svar blir 2π. Det var mulig å få to poeng på denne oppgaven, og for å oppnå full skår måtte elevene svare 2π eller tilsvarende. Svar som «$2\pi r$»og «verdien av grensen er lik omkretsen til sirkelen» ble belønnet med ett poeng. Noen få elever tok utgangspunkt i at omkretsen til en regulær mangekant med n sider er gitt ved formelen $2n \sin\frac{\pi}{n}$ (eventuelt $2n \sin\frac{180}{n}$), og svarte «$\lim\limits_{n\to\infty} 2n \sin\frac{\pi}{n}$». Dette ble også belønnet med ett poeng.

Som tabellen ovenfor viser, var dette en vanskelig oppgave internasjonalt, noe som kan tyde på at Arkimedes' metode for å beregne π og tilsvarende resonnementer er ukjente for elever i de fleste av deltakerlandene. Bare

19 % av de norske elevene fikk full skår på denne oppgaven, og referanselandene (med unntak av Nederland) gjorde det ikke mye bedre. Videre er også dette en oppgave der de norske guttene presterte bedre enn jentene, 24 % av de norske guttene fikk til denne oppgaven mot 12 % av jentene. Vi kan også legge merke til at en stor andel av elevene valgte å ikke svare på denne oppgaven, spesielt gjelder dette de norske og italienske elevene.

Den norske TIMSS Advanced-gruppa vurderte denne oppgaven til å ligge utenfor norsk læreplan, og i lys av dette er det kanskje ikke så overraskende at bare 19 % av de norske elevene fikk full skår på oppgaven. På den andre siden er jo dette en oppgave der resonnementer som «verdien av grensen er lik omkretsen til sirkelen» blir regnet som et delvis riktig svar, og da kunne man kanskje forventet at flere elever ville oppnådd ett poeng her. Denne oppgaven var også med i testen i 1995 (som Norge gjennomførte i 1998), og tabellen viser at de norske elevene presterte bedre da.

Algebraoppgave 4 (MA13001)

Funksjonene f og g er definert ved $f(x) = x - 1$ og $g(x) = (x+3)^2$.

$g(f(x))$ er da lik

Ⓐ $(x-1)(x+3)^2$

Ⓑ $(x+3)^2 - 1$

Ⓒ $(2x-2)^2$

Ⓓ $(x+2)^2$

Ⓔ $x^2 + 8$

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	33	39	26	24	14	11	16
B	11	14	15	13	13	5	10
C	3	6	6	3	3	3	3
D*	51	29	44	50	68	76	64
E	1	6	6	2	1	2	3
Ikke svart	2	7	4	9	2	3	4

Dette er en *trendoppgave*, det vil si at den også var med i den første studien. I denne flervalgsoppgaven er funksjonene f og g definert, og elevene blir bedt om å identifisere funksjonsuttrykket til den sammensatte funksjonen $g(f(x))$. Det riktige svaret er alternativ D, og resultatene viser at dette var en enkel oppgave internasjonalt (løsningsfrekvens på 64 %).

For å løse denne oppgaven kreves det ikke stort mer enn at man er fortrolig med notasjonen $g(f(x))$. Norske elever på dette nivået skal ha erfaring med å arbeide med sammensatte funksjoner, men i læreplanen (R94) er dette formulert som at elevene skal kunne «derivere […] sammensatte funksjoner» (KUF, 2000, 2MX delmål 5c) og «beregne integraler ved hjelp av variabelskifte» (KUF, 2000, 3MX delmål 5a), noe som ikke nødvendigvis betyr at elevene er fortrolige med notasjonen brukt i denne oppgaven. I en mye brukt lærebok for faget 2MX innføres for eksempel kjerneregelen på følgende måte:

> Vi antar at g og h er to funksjoner, og at f er en sammensatt funksjon med ytre funksjon g og kjerne u, der u er en funksjon av x. Da gjelder denne *kjerneregelen* for derivasjon:
>
> Vi deriverer den ytre funksjonen og multipliserer med den deriverte av kjernen:
> $f'(x) = g'(u) \cdot u'$
>
> (Sandvold et al., 2001, s. 89)

Med andre ord leder lærebokteksten elevene gjennom prosedyren for derivasjon av sammensatte funksjoner, uten at de møter notasjonen $g(f(x))$. (Dette utelukker selvfølgelig ikke muligheten for at lærere bruker denne notasjonen i sin undervisning.)

Som tabellen viser, presterer norske elever klart dårligere enn det internasjonale gjennomsnittet, og vi ligger også godt under alle referanselandene. I tillegg ser vi en markant tilbakegang fra 1998, da 51 % av de norske elevene klarte denne oppgaven. Alternativ A er det vanligste feilsvaret i Norge og alle referanselandene; dette svaret får man ved ganske enkelt å sette funksjonsuttrykkene til *f* og *g* etter hverandre. Det er verdt å merke seg at det kun er i Norge at dette svaralternativet har vært mer populært enn det riktige svaret. Det kan tyde på at kjennskap til formell notasjon vektlegges sterkere i referanselandene enn i Norge.

Algebraoppgave 5 (MA23133)

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = x^2 + 4$. En annen funksjon g er gitt ved $g(u) = \sqrt{2u - 1}$. Bestem minimumsverdien til $g\left(f(x)\right)$.

Ⓐ 0

Ⓑ $\sqrt{3}$

Ⓒ $\sqrt{\frac{7}{2}}$

Ⓓ $\sqrt{7}$

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	13	12	13	14	27	17
B	25	24	17	23	6	17
C	21	23	20	25	13	20
D*	22	24	14	20	45	28
Ikke svart	20	18	37	18	10	18

Dette er en flervalgsoppgave, og i likhet med forrige oppgave omhandler den sammensatte funksjoner. Også her defineres to funksjoner, *f* og *g*, men denne gangen blir elevene bedt om å finne minimumsverdien til den sammensatte funksjonen $g(f(x))$. For å løse oppgaven må elevene først bestemme funksjonsuttrykket $g(f(x)) = \sqrt{2x^2 + 7}$, noe som igjen krever at de er fortrolige med notasjonen $g(f(x))$. Videre må de slutte at denne funksjonen har sitt minimum når $x = 0$, slik at minimumsverdien blir $\sqrt{7}$. Riktig svar er altså alternativ D, og for å få dette svaret må elevene gjennomføre et resonnement i flere trinn.

Denne oppgaven falt vanskelig ut internasjonalt, med en løsningsfrekvens på 28 %. Norge ligger noe under det internasjonale gjennomsnittet, og det samme gjør de fleste av referanselandene. Siden dette er en flervalgsoppgave er det mulig å gjette seg til riktig svar, og med 4 alternativer blir gjettefaktoren på 25 %. Vi ser at det bare er elevene i Nederland som har en løsningsfrekvens som er høyere enn gjettefaktoren, og at elevene i flere av landene fordeler seg nokså likt på alternativene B, C og D. Dette kan tyde på at flesteparten av elevene har gjettet på svaret. Norge gjør det noe dårligere på denne oppgaven enn på den forrige oppgaven, men forskjellen er på langt nær så dramatisk som for de andre landene. Algebraoppgave 4 krevde ikke stort mer enn at elevene måtte være fortrolige med notasjonen $g(f(x))$, men denne oppgaven krever at de i tillegg kan gjennomføre et resonnement for å finne minimumsverdien til funksjonen.

Til slutt bemerker vi at en stor andel av elevene har valgt å ikke svare på denne oppgaven. Det kan skyldes at oppgaven er vanskelig, men en mulig medvirkende grunn kan også være at dette er en av de siste oppgavene i heftet[3] og elevene kan ha hatt dårlig tid mot slutten av testen.

3 Oppgavene er fordelt i 7 blokker, kalt M1, M2, …, M7. Disse blokkene er fordelt på fire forskjellige hefter, tre blokker i hvert hefte. De fleste blokkene forekom i to hefter hver, men blokk M7 (som denne oppgaven tilhører) var bare med i oppgavehefte nummer 4, og var plassert bakerst i det heftet (se kapittel 12).

Algebraoppgave 6 (MA13003)

Det er foreslått to matematiske modeller for å beregne inntekten y kroner ved salg av x tusen enheter av en vare (hvor $0 < x < 5$). De to modellene, P og Q, er basert på to ulike markedsføringsmetoder.

modell P: $y = 6x - x^2$
modell Q: $y = 2x$

For hvilke verdier av x gir modell Q større inntekt enn modell P?

Ⓐ $0 < x < 4$

Ⓑ $0 < x < 5$

Ⓒ $3 < x < 5$

Ⓓ $3 < x < 4$

Ⓔ $4 < x < 5$

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	14	11	8	17	19	15	15
B	4	7	8	9	5	2	7
C	3	10	12	10	8	2	10
D	2	6	7	6	6	1	6
E*	74	59	55	40	53	78	51
Ikke svart	1	7	9	19	8	2	11

Dette er også en trendoppgave. I denne flervalgsoppgaven blir elevene bedt om å sammenlikne to enkle matematiske modeller for å beregne inntekten y kroner ved salg av x tusen enheter av en vare. Det riktige svaret er alternativ E.

Elevene kan finne svaret ved å løse andregradsulikheten $2x > 6x - x^2$ for hånd, eller ved å tegne grafene til de to funksjonene og lese av løsningen. Dette er en oppgavetype som bør være velkjent for de norske elevene. I læreplanen for 2MX presiseres det blant annet at elevene skal «kunne formulere og analysere enkle matematiske modeller og kunne vurdere deres gyldighet»

(KUF, 2000, 2MX delmål 2a), «kunne bruke teknologiske verktøy i utforsking og problemløsing» (ibid., delmål 2c), og «kunne bruke fortegnsskjema til å løse ulikheter med annengradsfunksjoner og rasjonale funksjoner» (ibid., delmål 4b). Siden begge modellene er formulert som funksjonsutrykk, er det ikke urimelig å anta at mange norske elever har valgt å løse oppgaven grafisk på kalkulator.

Internasjonalt falt denne oppgaven ut som middels vanskelig, og den er en av de få oppgavene der norske elever presterer bedre enn det internasjonale gjennomsnittet. Av tabellen ser vi også at Norge gjør det noe bedre enn referanselandene, med unntak av Nederland som igjen er i en klasse for seg selv. Det er selvfølgelig positivt at Norge gjør det relativt bra på denne oppgaven, men vi må samtidig legge merke til den klare tilbakegangen fra 1998. Enkel matematisk modellering og løsing av andregradsulikheter var ikke sterkere vektlagt i den læreplanen elevene fulgte i 1998, og det er betenkelig at norske elever presterer klart dårligere på en oppgavetype som fortsatt må sies å være sentral i norsk skoletradisjon.

Algebraoppgave 7 (MA23135)

$$\frac{x+1}{x-2} > 1$$

Løs ulikheten ovenfor.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: $x > 2$	16	30	60	26	47	45
Galt svar	64	60	34	71	48	48
Ikke svart	20	10	7	3	5	7

Dette er en åpen oppgave der elevene blir bedt om å løse en brøkulikhet. I den internasjonale rapporten blir denne oppgaven brukt som eksempel på hva en elev på *middels kompetansenivå* kan, noe som også gjenspeiles i det internasjonale gjennomsnittet på 45 % for denne oppgaven. Av tabellen ser vi at de norske elevene presterer langt under det internasjonale gjennomsnittet, og Norge ligger også godt under alle referanselandene. Det kan i tillegg bemerkes at andelen elever som ikke svarer på oppgaven er betraktelig høyere i Norge enn i referanselandene.

Brøkulikheter er en del av læreplanen i 2MX, og man kan finne flere oppgaver av denne typen i lærebøker for faget. I lys av dette er det oppsiktsvekkende at norske elever presterer så svakt på denne oppgaven. Det er også interessant å trekke inn den andre frigitte oppgaven som tar for seg ulikheter (algebraoppgave 6), der de norske elevene presterte langt bedre. Algebraoppgave 6 var, til forskjell fra denne oppgaven, satt i en praktisk kontekst og formulert slik at det er nærliggende å løse den grafisk. Siden elevene ikke ble bedt om å vise hvordan de kom fram til svaret på algebraoppgave 7, er det ikke mulig å vite om norske elever løste oppgaven ved regning eller grafisk, og heller ikke mulig å vite hvilke feil norske elever gjorde her. Den lave løsningsfrekvensen kan likevel antyde at få elever valgte å løse oppgaven grafisk, og at elevene har liten kompetanse i å løse slike ulikheter ved regning på tross av læreplanen for 2MX som fastslår at elevene skal

- «forstå hvordan man kan omforme og forenkle likninger og ulikheter …» (KUF, 2000, 2MX delmål 4a), og
- «kunne bruke fortegnsskjema til å løse ulikheter med annengradsfunksjoner og rasjonale funksjoner» (ibid., delmål 4b).

Til slutt kan det bemerkes at de norske guttene presterte bedre enn jentene på denne oppgaven (19 % av guttene og 12 % av jentene svarte riktig), mens det ikke viste seg noen slike kjønnsforskjeller på den forrige oppgaven.

Algebraoppgave 8 (MA13009)

Hvor mange punkter med heltallige koordinater ligger på grafen til funksjonen $y = \frac{12}{x}, x > 0$?

Ⓐ 2

Ⓑ 4

Ⓒ 6

Ⓓ uendelig mange

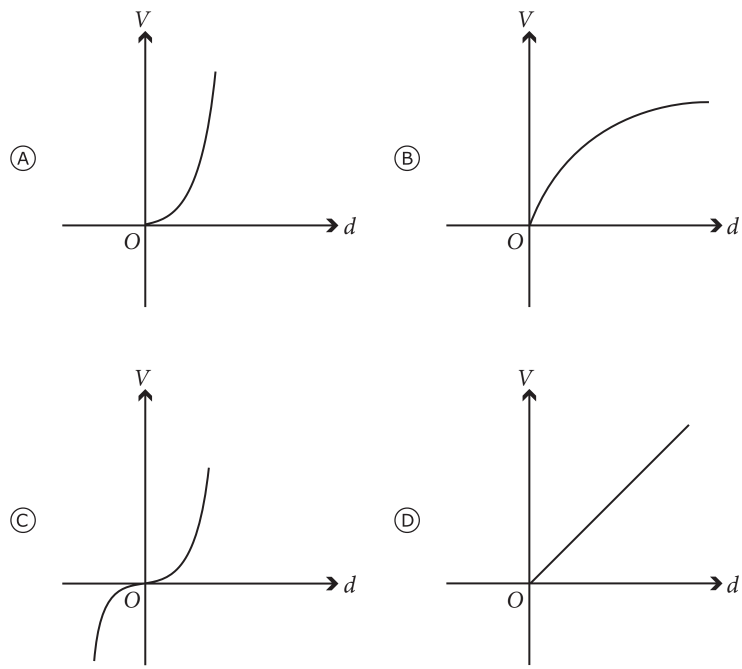
	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	4	5	5	2	2	4	3
B	8	11	10	7	6	6	7
C *	59	46	39	46	60	30	48
D	29	31	40	29	28	56	35
Ikke svart	1	8	7	15	4	5	7

Denne flervalgsoppgaven var også med i testen i 1998. Her blir elevene bedt om å avgjøre hvor mange punkter med heltallige koordinater som ligger på grafen til funksjonen $y = \frac{12}{x}$ når $x > 0$. Det riktige svaret er 6 punkter (alternativ C), og oppgaven kan enkelt løses ved å sette heltallene 1, 2, ..., 11, 12 inn for x i funksjonsuttrykket og telle opp hvor mange av de resulterende y-verdiene som er hele tall. Internasjonalt falt dette likevel ut som en middels vanskelig oppgave (løsningsfrekvens 48 %), og de norske elevene presterte omtrent som det internasjonale gjennomsnittet. Tabellen viser at det av referanselandene bare er Slovenia som gjør det bedre enn de norske elevene, og at dette er en oppgave der de vanligvis så høytpresterende nederlandske elevene skårer lavt. Vi ser imidlertid også at de norske elevene i 1998 var omtrent på det nivået slovenske elever er på i dag, slik at Norge har hatt en klar tilbakegang fra 1998.

Det vanligste feilsvaret på denne oppgaven er D, noe som kan skyldes at mange elever ikke får med seg at det spørres etter heltallige koordinater. Det er verdt å legge merke til at dette svaralternativet er langt mer populært enn det riktige svaralternativet blant de nederlandske elevene. En kan undre seg over om så mange av de vanligvis høytpresterende nederlandske elevene ikke har tatt seg tid til å lese oppgaven ordentlig, eller om det finnes andre forklaringer. Det kan for eksempel tenkes at begrepet 'heltallig' ikke er godt kjent blant nederlandske elever.

Algebraoppgave 9 (MA23208)

En kuleformet ballong blir blåst opp. Hvilken graf viser volumet *V* som en funksjon av diameteren *d*?



	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A*	37	42	38	29	60	40
B	23	27	17	29	21	22
C	16	9	10	7	10	13
D	23	21	30	34	9	22
Ikke svart	1	2	5	1	0	4

I denne flervalgsoppgaven presenteres elevene for en situasjon der en kuleformet ballong blir blåst opp. Elevene blir bedt om å identifisere den grafen som viser volumet *V* av ballongen som funksjon av diameteren *d*. Oppgaven hører hjemme under emneområdet Algebra, men selve konteksten i oppgaven er altså geometrisk. For å løse denne oppgaven må elevene vite at volumet av en kule er proporsjonal med diameteren i tredje (formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ er gitt foran i oppgaveheftet), gjenkjenne grafen til en tredjegradsfunksjon, og forstå at den geometriske konteksten krever at $d > 0$. Dette fører til at alternativ A er riktig svar.

I den internasjonale rapporten blir denne oppgaven brukt som eksempel på hva en elev på *høyt kompetansenivå* kan. Det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven er 40 %, og de norske elevene presterer omtrent på dette nivået. Det å tegne og tolke funksjonsgrafer står relativt sentralt i skolematematikken (på videregående skole) i Norge, og alle de norske elevene har tilgang til grafiske kalkulatorer. I lys av dette kunne man forventet at en større andel av de norske elevene ville fått til denne oppgaven.

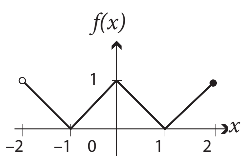
De vanligste feilsvarene er alternativ B og D. Alternativ C viser grafen til en tredjegradsfunksjon uten å oppfylle kravet om at $d > 0$, og var det minst valgte svaralternativet i alle referanselandene. Det er mulig at elevene ikke har kjent igjen grafen til en tredjegradsfunksjon, men det kan også forklares ved at elevene ikke har tenkt på at volumet av en kule er proporsjonal med diameteren i tredje, og dermed ikke har lett etter en slik graf. Alle som har blåst opp ballonger vet at en ballong vokser raskest i begynnelsen, men så flater veksten ut etter hvert som man blåser. Elever som velger alternativ B kan tenkes å gi uttrykk for en slik intuitiv oppfatning. Når det gjelder alternativ D kan det bemerkes at det i skolen er nokså vanlig å bruke lineære funksjoner i modelleringsoppgaver. I forskningslitteraturen kan man finne flere studier som har avdekket at elever som blir bedt om å løse tekstoppgaver som omhandler lengder, arealer og volumer i stor grad anvender lineære modeller i situasjoner der slike modeller slett ikke er anvendbare (se for eksempel De Bock et al., 2002). Disse studiene har riktignok fokusert på yngre elever (opp til 16 år), men populariteten til alternativ D på denne oppgaven kan tyde på at den såkalte «illusjonen om linearitet» også finnes hos en god del elever som tar skolens mest avanserte matematikkurs.

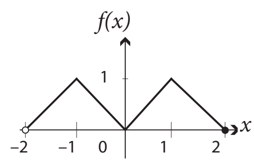
Algebraoppgave 10 (MA13002)

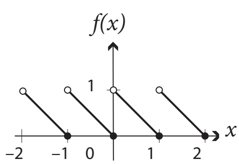
En funksjon f er definert ved:

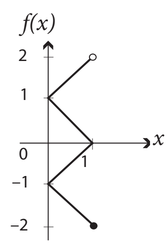
$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x-1 \quad \text{hvis} \quad -2 < x \leq -1\\
f(x) &= x+1 \quad \text{hvis} \quad -1 < x \leq 0\\
f(x) &= -x+1 \quad \text{hvis} \quad 0 < x \leq 1\\
f(x) &= x-1 \quad \text{hvis} \quad 1 < x \leq 2
\end{aligned}
$$

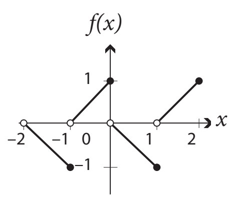
Hvilket av disse diagrammene viser grafen til f?

A


B


C


D


E


	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A*	60	43	41	51	55	87	57
B	9	14	12	10	8	1	8
C	4	7	7	9	5	2	10
D	8	9	10	5	7	2	6
E	13	17	22	15	19	6	14
Ikke svart	6	10	7	11	5	2	6

I denne flervalgsoppgaven må elevene gjenkjenne grafen til en funksjon med delt funksjonsuttrykk. Riktig svar er alternativ A, og det internasjonale gjennomsnittet på 57 % viser at denne oppgaven falt ut som nokså enkel i de fleste land.

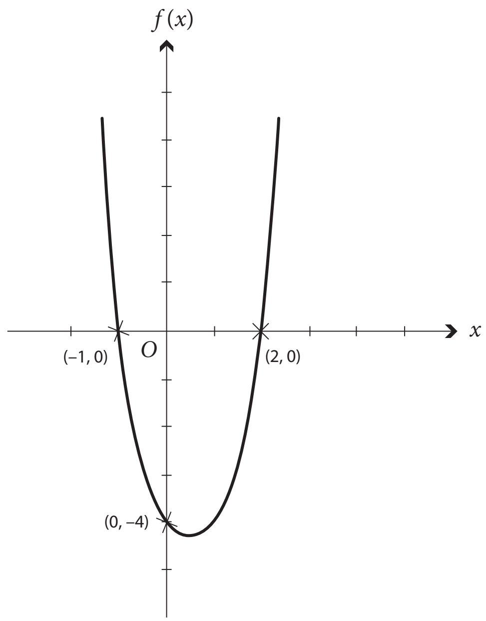
Det kan være interessant å se denne oppgaven i sammenheng med den forrige. I begge tilfellene skal elevene identifisere riktig graf. Forskjellen er at funksjonsuttrykket til funksjonen f er gitt i denne oppgaven, mens forrige oppgave beskriver en praktisk situasjon der elevene selv må finne en matematisk modell som passer med beskrivelsen. Med unntak av Sverige gjør referanselandene det betraktelig bedre på denne oppgaven enn på den forrige. Dette kan tyde på at det som gjorde algebraoppgave 9 vanskelig for elevene i de fleste referanselandene, ikke var å gjenkjenne grafen til en tredjegradsfunksjon, men heller den praktiske konteksten (modellering) som brakte fram intuitive forestillinger hos flere av elevene.

De norske elevene presterer dårligere enn det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven, og vi ligger under alle referanselandene med unntak av Sverige. Det kan tyde på at de norske elevene generelt har vansker med å se sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og funksjonsgraf, men det kan også skyldes at våre elever har lite erfaring med funksjoner med delt funksjonsuttrykk.

Til slutt er det verdt å merke seg at denne oppgaven også var med i testen i 1998, og at Norge har hatt en markant tilbakegang siden da. Det er imidlertid mulig at elevene som deltok i 1998 hadde noe mer erfaring med funksjoner med delt funksjonsuttrykk.

Algebraoppgave 11 (MA23141)

Denne åpne oppgaven blir brukt i den internasjonale rapporten som eksempel på hva en elev på *avansert kompetansenivå* kan. I oppgaven vises grafen til en andregradsfunksjon f, som er gitt ved $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tre punkter er markert på grafen, og koordinatene til disse punktene er gitt. Elevenes oppgave er å finne verdiene til a, b og c.



Grafen til funksjonen f er vist ovenfor. Funksjonsuttrykket til f er gitt ved $f(x) = ax^2 + bx + c$. Finn verdiene til a, b og c.

Vis framgangsmåten.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: $a = 2$, $b = 2$, $c = -4$ Regresjon på kalkulatoren	6	0	0	0	1	1
Riktig svar: $a = 2$, $b = 2$, $c = -4$ Annen riktig metode	4	8	22	33	14	23
Galt svar: $c = -4$ (a og b mangler eller er feil)	9	18	12	28	30	14
Andre gale svar	18	19	8	23	31	22
Ikke svart	63	55	58	16	23	40

Riktig svar er $a = 2$, $b = 2$, $c = -4$, og for å få poeng på denne oppgaven må alle tre verdiene oppgis. Det internasjonale gjennomsnittet på 24 % viser at dette falt ut som en vanskelig oppgave i de fleste land. En mulig forklaring er at elevene har vansker med å skille mellom de ulike rollene til bokstavsymbolene (a, b, c og x) i denne oppgaven. Internasjonalt kan man finne flere studier som har undersøkt elevers tolkning av bokstavsymboler. Disse konkluderer med at elever på alle nivåer har vansker med å skille mellom de ulike rollene bokstavsymbolene kan ha, og at det skaper problemer for elever når rollen til et bokstavsymbol i et algebraisk uttrykk endrer seg, i dette tilfellet eksemplifisert ved at x-verdiene er kjente mens parametrene a, b og c spiller rollen som ukjente (Trigueros & Ursini, 1999; Ursini & Trigueros, 2004). De norske elevene presterer klart dårligere enn det internasjonale gjennomsnittet her, og igjen ligger vi under alle referanselandene med unntak av Sverige.

Denne oppgaven kan løses på flere måter. Den mest brukte metoden internasjonalt var å sette koordinatene til de tre oppgitte punktene inn i funksjonsuttrykket, og løse de resulterende tre likningene for de tre ukjente a, b og c. De fleste norske elevene som har fått til denne oppgaven har imidlertid brukt kvadratisk regresjon på kalkulatoren, en metode som er svært lite brukt i andre land (internasjonalt løste kun 1 % av elevene oppgaven på denne måten). I den norske videregående skolen er det en sterk tradisjon for bruk av grafisk kalkulator. Læreplanen for 2MX/3MX inneholder generelle formuleringer som at elevene skal «kunne bruke teknologiske verktøy i utforsking og problemløsing» (KUF, 2000, 2MX og 3MX delmål 2c), mens det i læreplanen for 1MX presiseres at elevene skal «kunne bruke regresjon på lommeregneren til å finne funksjonsuttrykk som tilnærmet beskriver praktiske sammenhenger» (KUF, 1999, 1MX delmål 9g). I lys av dette kunne man kanskje forventet at flere norske elever ville løst oppgaven, da 80 % av dem rapporterer at de har brukt en grafisk kalkulator (eller grafisk kalkulator med symbolbehandlingsmuligheter) når de arbeidet med oppgavene i TIMSS Advanced-studien.

Til slutt kan det bemerkes at andelen elever som ikke har svart på denne oppgaven er høy i de fleste land. Det kan skyldes at oppgaven er vanskelig, men igjen er en mulig medvirkende årsak at dette er en av de siste oppgavene i heftet og elevene kan ha hatt dårlig tid mot slutten av testen.

4.3 Avsluttende kommentarer

Hvis vi ser på alle de frigitte algebraoppgavene, viser det seg at de norske elevene flere steder ikke kan det de lærte i 1MX/2MX, men at 3MX-pensum (her: følger og rekker) går bedre. Det kan da være grunn til å peke på at det elevene lærte i 1MX og 2MX ikke ble testet ved eksamen i 3MX. Det ble altså ikke lagt opp til at elevene skulle ivareta de kunnskapene og ferdighetene de hadde opparbeidet seg i tidligere matematikkurs. En slik tradisjon er uheldig med tanke på langsiktig læring. Psykologisk forskning har vist at når matematisk kunnskap tilegnes over flere år, der det opprinnelige innholdet repeteres og brukes i senere matematikkurs, vil prestasjonsnivået man har ved slutten av utdanningen kunne holde seg i svært mange år selv uten videre repetisjon etter endt utdanning. På den andre siden viser denne forskningen at når kunnskap om et emne tilegnes over kort tid, uten å bli repetert i senere matematikkurs, vil prestasjonsnivået med stor sannsynlighet være markant dårligere noen år etter endt utdanning (Bahrick & Hall, 1991).

Til slutt bemerkes det at denne situasjonen er forbedret etter innføringen av Kunnskapsløftet. Det er nå mulig, i alle fall i prinsippet, å teste stoff fra tidligere år ved en skriftlig eksamen i matematikk.

5 Prestasjoner på oppgaver i Kalkulus

Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo

I dette kapittelet presenteres resultatene for de frigitte oppgavene i området Kalkulus i TIMSS Advanced 2008. For flervalgsoppgaver angis det hvor stor prosentandel av elevene som valgte de ulike svaralternativene. Når det gjelder de åpne oppgavene, er disse kodet etter et internasjonalt skjema, der kodene forteller både om svaret er riktig eller galt, og hvilken type svar det er (for eksempel hvilken metode som er brukt i løsningen, eller hvilken feil som er begått). I presentasjonen av resultatene fra de åpne oppgavene gjengir vi ikke alle detaljene i kodeskjemaet, men beskriver sentrale trekk ved oppgaven og ulike kategorier av elevsvar sammen med en oversikt over hvor stor prosentandel av elevene som ga de ulike typene svar. Kodeskjemaene og prosedyrene for koding av de åpne oppgavene er nærmere beskrevet i kapittel 12.

For hver oppgave sammenliknes de norske elevenes prestasjoner med de valgte referanselandene. For trendoppgavene, det vil si oppgaver som var med både i 2008 og i 1995 (1998 i Norge), presenteres de norske resultatene fra begge disse studiene. Endringen i de norske elevenes prestasjoner er da en viktig del av drøftingen. Resultatene til de norske elevene relateres dessuten til læreplanen i 3MX og 2MX der det er relevant. For trendoppgavene er det aktuelt å trekke inn læreplanen både slik den opprinnelig var etter reformen i 1994, og slik den ble etter revisjonen i 2000.

Det er viktig å ha klart for seg at det kan være store variasjoner mellom resultater på enkeltoppgaver. Feilmarginene på prosentangivelsene i dette kapittelet er av størrelsesorden 5 prosentpoeng. Det tar vi hensyn til i kommentarene.

5.1 Emneområdet Kalkulus

Området Kalkulus i TIMSS Advanced omfatter i all hovedsak differensial- og integralregning. Det betyr først og fremst grenseverdier, derivasjon og integrasjon. Elevene skal forstå begrepene, de skal ha ferdigheter i å beregne grenseverdier og i å derivere og integrere funksjoner, og de skal kunne anvende dette til å løse både matematiske og praktiske problemer. For en nærmere beskrivelse henviser vi til rammeverket for TIMSS Advanced (Garden et al., 2006).

I den norske læreplanen for 2MX slås det i mål 5 (Derivasjon og integrasjon) fast at «Elevene skal kjenne det teoretiske grunnlaget for differensial- og integralregningen, kunne derivere sammensatte funksjonsuttrykk og integrere enkle funksjoner» (KUF, 2000), mens man i mål 5 (Integralregning) i læreplanen for 3MX kan lese at «Elevene skal kunne bruke de vanligste metodene til å løse integraler, og de skal kunne løse praktiske problemer ved hjelp av integrasjon». Grenseverdier er relativt lite vektlagt i den norske læreplanen for MX-kursene, men i all hovedsak passer emneområdet Kalkulus i TIMSS Advanced godt overens med den læreplanen de norske 3MX-elevene har fulgt.

5.2 Kalkulusoppgavene

Kalkulusoppgave 1 (MA13004)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x+1)(x+1)}{3x^2-2}$ er lik

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$

Ⓑ $\dfrac{2}{3}$

Ⓒ 1

Ⓓ 6

Ⓔ ∞

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	11	14	17	3	15	7	9
B*	56	37	27	75	51	69	58
C	13	12	15	7	9	7	9
D	1	6	5	0	3	1	3
E	16	18	25	10	14	12	14
Ikke svart	4	13	10	5	9	4	7

Dette er en flervalgsoppgave om grenseverdi. Grenseverdi er et sentralt begrep i matematikk; det betegner den verdien et funksjonsuttrykk $f(x)$ (eller en følge) nærmer seg når variabelen x går mot et tall eller mot pluss eller minus uendelig. I denne oppgaven skal elevene angi hvilken av fem oppgitte verdier som er grensen for utrykket når x går mot pluss uendelig.

Oppgaven var med i den tidligere TIMSS-studien av matematikkspesialister på videregående skole i 1995, som Norge gjennomførte i 1998. Det er en klar tilbakegang i de norske elevenes prestasjoner på oppgaven; i 1998 svarte 56 % av 3MX-elevene riktig på oppgaven, mens dette i 2008 hadde sunket med om lag 20 prosentpoeng. At bare 37 % av de norske elevene fikk til oppgaven i 2008 er markant under det internasjonale gjennomsnittet, og langt svakere enn alle de valgte referanselandene bortsett fra Sverige. På denne, som på andre oppgaver, er det en mager trøst at Sverige har et enda svakere resultat enn Norge. Sverige utmerker seg jo som det landet som totalt sett har den sterkeste tilbakegangen fra den tidligere studien. Når det gjelder akkurat denne oppgaven, fikk 44 % av de svenske elevene den til i 1995, slik at tilbakegangen for de svenske elevene her har vært omtrent som for de norske.

For de norske elevene kan det svake resultatet tenkes å være relatert til en relativ liten vektlegging av grenseverdier i læreplanen. Som tidligere nevnt ble læreplanen for matematikk i videregående skole revidert i 2000, noe som betyr at elevene som deltok i 2008 ikke hadde fulgt nøyaktig samme plan som de som deltok i 1998. Før revisjonen presiserte læreplanen at elevene skulle «kjenne begrepet grenseverdi, og kunne regne ut grenseverdien til enkle, ubestemte uttrykk» (R94, 2MX gjengitt i Sandvold et al., 1995). I 2000 ble dette endret til «kjenne begrepene grenseverdi og kontinuitet» (KUF, 2000, 2MX delmål 5a) og «kjenne definisjonen av derivert og kunne bruke definisjonen til å derivere enkle funksjoner» (ibid., delmål 5b). Å «bruke definisjonen til å derivere» innebærer å beregne en grenseverdi, selv om dette ikke er formulert eksplisitt. Lærerne som underviste klassene som deltok i TIMSS Advanced 2008 oppga at 84 % av de norske elevene hadde blitt undervist i grenseverdier. Basert på målformuleringene ovenfor er det imidlertid nærliggende å si at elevene som deltok i 2008 hadde fulgt en læreplan som la mindre vekt på å regne med grenseverdier enn elevene som deltok i 1998.

Kalkulusoppgave 2 (MA23165)

Bestem $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

Vis framgangsmåten.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: $\frac{3}{2}$	15	10	54	41	9	39
Galt svar	43	52	35	45	78	41
Ikke svart	42	38	11	14	13	20

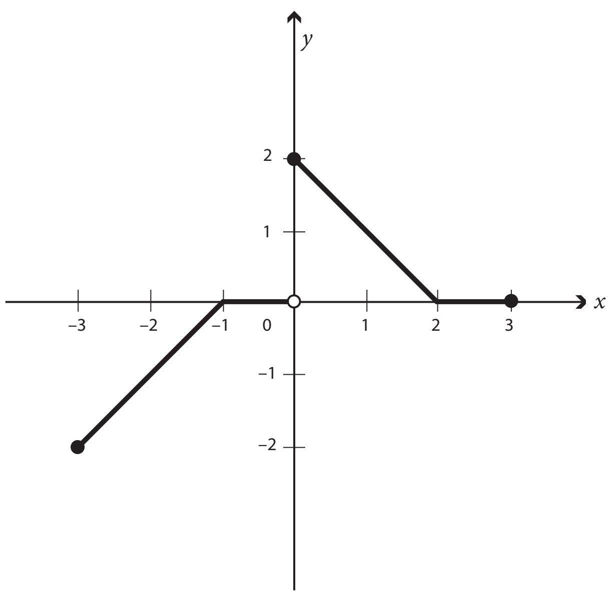
Som den forrige oppgaven tester også denne elevenes kunnskaper om grenseverdier. I motsetning til i den første kalkulusoppgaven skal elevene her selv beregne hva grenseverdien blir og vise hvilken framgangsmåte de brukte, ikke bare velge det riktige svaret fra flere oppgitte verdier. Oppgaver hvor elevene må gjøre beregninger og vise framgangsmåten de brukte, faller generelt vanskeligere enn flervalgsoppgaver, hvor man både kan få noen ideer om hva det riktige svaret er og eventuelt gjette seg fram til det.

Resultatene på denne oppgaven har klare likhetstrekk med resultatene på den forrige, men prestasjonene er svakere her, både internasjonalt og for de norske elevene. Det er bare 15 % av de norske elevene som løser oppgaven, noe som er markant lavere enn det internasjonale snittet på 39 %. Italia og Slovenia presterer klart bedre enn de andre referanselandene, med henholdsvis 54 % og 41 % av elevene som svarte riktig. Spesielt sett på bakgrunn av at de som er testet i disse landene representerer en langt større prosentandel av årskullet, 40 % i Slovenia og 20 % i Italia, framstår det norske resultatet som svakt. Riktignok presterer elevene i to land, Sverige og Nederland, enda svakere. For Sverige er det i samsvar med landets generelt svake resultat, mens Nederland generelt er høytpresterende. Noe av forklaringen på det svake resultatet for Nederland på denne oppgaven kan være at bare 69 % av lærerne i landet svarer at elevene har fått undervisning i emnet, mens for eksempel 84 % av de norske lærerne svarer at elevene har fått slik undervisning. På den annen side presterte nederlandske elever godt på den forrige oppgaven om grenseverdier, så det er neppe hele forklaringen.

Kalkulusoppgave 3 (MA13025)

Den neste oppgaven er en trendoppgave. Elevene presenteres for en funksjon som er definert ved sin graf.

Funksjonen $y = f(x), -3 \le x \le 3$ er definert ved følgende graf:



A. For hvilke x-verdier i intervallet $-3 < x < 3$ er funksjonen f IKKE kontinuerlig?

B. For hvilke x-verdier i intervallet $-3 < x < 3$ er funksjonen f IKKE deriverbar?

I **del A** skal de bestemme hvor funksjonen IKKE er kontinuerlig. Dette er ikke en flervalgsoppgave, de skal altså selv finne svaret og skrive det ned.

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
Riktig svar: bare for $x = 0$	54	35	23	52	58	37	46
Galt svar	27	36	52	20	27	56	34
Ikke svart	19	29	26	28	15	7	20

Kontinuitet er et grunnleggende og viktig begrep i forståelsen av funksjoner, og det har en presis matematisk definisjon. Noe upresist kan man si at det at en funksjon er *kontinuerlig*, betyr at grafen til funksjonen «henger sammen». Hvis grafen til funksjonen ikke «henger sammen» i et punkt, sier vi at funksjonen ikke er kontinuerlig i dette punktet. Spørsmålet handler altså om å se etter x-verdier hvor grafen til funksjonen ikke «henger sammen». For $x = 0$ har grafen et brudd; den «henger ikke sammen», men gjør et hopp fra 0 til 2.

Tabellen viser en markant tilbakegang i norske 3MX-elevers kunnskaper om kontinuitet. I 1998 svarte 54 % av elevene riktig på denne oppgaven, mot bare 35 % i 2008. Det norske resultatet er også svakt i en internasjonal sammenheng, det er bare de svenske elevene som presterer enda svakere. Tar man i betraktning at elevene i Slovenia og Italia representerer langt større andeler av den aktuelle aldersgruppa enn det som er tilfellet i Norge, framstår resultatet som enda svakere enn det som direkte framkommer av tabellen.

Det norske resultatet kan tyde på at vi i norsk skole i mindre grad enn før vektlegger forståelse av grunnleggende begreper. Det er mulig at dette igjen avspeiler revisjonen av matematikkplanen fra R94 som ble foretatt i 2000, noe som blir nærmere diskutert i forbindelse med deloppgave B nedenfor.

I **del B** skal elevene bestemme hvor funksjonen IKKE er deriverbar.

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
Riktig svar: For $x = -1$, $x = 0$ og $x = 2$	18	2	3	8	3	8	10
Galt svar: Bare for $x = 0$	23	25	28	26	24	45	26
Galt svar: «f har ingen derivert der grafen er flat»	13	15	16	5	15	26	10
Andre gale svar	17	18	23	20	21	15	24
Ikke svart	29	40	30	41	37	6	30

Derivasjon og deriverbarhet er sentrale begreper for å kunne beskrive og forstå variasjoner i funksjonsverdier. Den deriverte funksjonen til en funksjon har en presis matematisk definisjon. Kort og upresist kan man si at den *deriverte* til en funksjon beskriver funksjonens grad av forandring eller vekst. I et gitt punkt på grafen er den deriverte lik stigningen til tangenten i punktet. *Deriverbarhet* relaterer seg til om den deriverte eksisterer eller ikke. Hvis den deriverte eksisterer i et punkt, er funksjonen f deriverbar i punktet, og hvis den deriverte eksisterer for alle punkter i et intervall, er funksjonen f deriverbar i hele intervallet.

For å besvare del B av denne oppgaven må man se etter x-verdier hvor den oppgitte grafen viser at funksjonen f ikke har noen derivert. En funksjon er ikke deriverbar i et punkt hvor den er diskontinuerlig. Elever som vet dette, og som svarte riktig i del A ved å angi at funksjonen er diskontinuerlig for verdien $x = 0$, vil derfor lett få verdien $x = 0$ som svar også i B. Mange elever hadde $x = 0$ som eneste svar i B. Disse elevene vet ikke at en funksjon heller ikke har en derivert i et knekkpunkt. Funksjonen gitt ved den viste grafen har to knekkpunkter, for $x = -1$ og for $x = 2$, som betyr at den heller ikke er deriverbar for disse to x-verdiene.

At den internasjonale løsningsprosenten var så lav som 10 % viser tydelig at det falt vanskelig for elevene i de fleste land å finne det riktige svaret. Det er ellers et gjennomgående trekk at en stor andel av elevene velger å ikke svare på oppgaven, med et internasjonalt gjennomsnitt på «Ikke svart» på 20 % i A og

30 % i B. Av referanselandene er det bare Nederland som skiller seg positivt ut i så henseende; der er det henholdsvis 7 % og 6 % som ikke svarer.

Hvis vi ser på dataene fra testen i 1995/98, var dette en vanskelig oppgave (internasjonal løsningsfrekvens 8,5 %) hvor de norske elevene presterte relativt bra. Det er ikke helt lett å forklare hvorfor bare 2 % av de norske elevene fikk oppgaven riktig i 2008, mot 18 % i 1998. Endringer i læreplanen kan være en medvirkende årsak. Den planen som gjaldt for 2MX i 1998, presiserte at elevene skulle «kjenne kontinuitetsbegrepet og ut fra utseendet til funksjonsgrafen kunne avgjøre hvor en funksjon er kontinuerlig og hvor den er deriverbar» (R94, 2MX, mål 6b, gjengitt i Sandvold et al., 1995). Med revisjonen i 2000 ble dette endret til at elevene skulle «kjenne begrepene grenseverdi og kontinuitet» (KUF, 2000, 2MX delmål 5a) og «kjenne definisjonen av derivert og kunne bruke definisjonen til å derivere enkle funksjoner» (ibid., delmål 5b).

Kalkulusoppgave 4 (MA13006)

Den deriverte av $\dfrac{4}{\sqrt{3x-4}}$ er

Ⓐ $12\sqrt{3x-4}$

Ⓑ $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Ⓒ $\dfrac{-2}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

Ⓓ $\dfrac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

Ⓔ $6\sqrt{3x-4}$

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	13	19	10	7	5	8	9
B	9	15	22	7	9	4	10
C	21	21	27	21	26	19	21
D*	40	22	27	42	36	55	44
E	9	10	8	9	13	10	8
Ikke svart	7	13	8	14	11	5	9

Dette er en flervalgsoppgave som tester elevene i derivasjon. Tabellen viser en sterk tilbakegang i de norske elevenes prestasjoner ved at prosentandelen som svarte riktig er tilnærmet halvert, fra 40 % i 1998 til 22 % i 2008. Norske elever presterer også langt under det internasjonale gjennomsnittet på oppgaven, og lavere enn samtlige referanseland.

I 2008 er det omtrent like mange norske elever som velger alternativ C som det riktige alternativet D. Elevene som svarer C kan man anta har startet å derivere riktig. Siden formelen for derivasjon av en brøk sto oppgitt foran i testheftene, skulle det heller ikke være så vanskelig å komme riktig i gang med derivasjonen. Den feilen elevene så gjør, er at de glemmer å multiplisere med den deriverte av «kjernen», det som kalles *kjerneregelen* for derivasjon av sammensatte funksjoner. I TIMSS Advanced-studien var det flere oppgaver som testet elevene i derivasjon av sammensatte funksjoner, og som vi snart skal se var det å glemme å multiplisere med den deriverte av kjernen en gjennomgående feil som norske elever gjorde på slike oppgaver.

En annen mulig årsak til det svake resultatet kan være at derivasjon sto mer sentralt i 2MX enn i 3MX. Nå var det samme tilfelle i 1998, så det kan vanskelig forklare tilbakegangen. Videre kan man peke på at det har vært en omfattende bruk av kalkulator og formelbok med egne notater det siste tiåret, noe som kan ha bidratt til mindre trening i – og vedlikehold av – ferdigheter som derivasjon.

Eksamensformen i Norge, hvor man ikke skulle prøves i stoff fra 2MX til eksamen i 3MX, kan også ha bidratt til manglende vedlikehold av grunnleggende ferdigheter fra 2MX. Man vet at ferdigheter må både trenes inn og ikke minst vedlikeholdes over tid, ellers kan de lett gå i glemmeboka. Spesielt viktig er dette i et så hierarkisk oppbygd fag som matematikk. Det er vanskelig å utvikle kompetanse på høyere nivå om man ikke samtidig tar vare på og vedlikeholder det man lærte på lavere trinn.

Kalkulusoppgave 5 (MA23159)

Finn $f'(x)$, når $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.
Vis framgangsmåten.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: $f'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}$	29	20	60	67	48	55
Galt svar: Kvotientregelen er brukt, men svaret er galt	33	19	11	10	40	14
Andre gale svar	30	52	17	21	12	24
Ikke svart	8	10	13	3	1	7

I denne oppgaven må elevene selv finne fram til det riktige svaret, og i tillegg vise på en tilfredsstillende måte hvordan de gjennomførte derivasjonen. Slike åpne oppgaver er generelt vanskeligere enn flervalgsoppgaver. Denne oppgaven faller likevel ut som litt enklere enn den foregående flervalgsoppgaven, selv om begge tester elevenes kunnskaper om derivasjon. Både det internasjonale gjennomsnittet og resultatet for tre av landene er noe bedre enn det var på den forrige oppgaven. En mulig årsak til dette kan være at elevene her ikke trenger å bruke kjerneregelen for sammensatte funksjoner; oppgaven løses rett fram ved hjelp av regelen for derivasjon av et produkt eller en kvotient. Formlene for derivasjon av et produkt og en kvotient sto begge foran i oppgaveheftene elevene fikk utdelt.

Resultatet på denne oppgaven har flere likhetstrekk med resultatet på den forrige, som at norske elever presterer svakt i et internasjonalt perspektiv. Bare 29 % av de norske elevene greide oppgaven, mot et internasjonalt gjennomsnitt på 55 %. Prestasjonen til de norske elevene er også markant svakere enn i alle referanselandene bortsett fra Sverige, hvor elevene generelt presterer svakere enn de norske.

Hele 33 % av de norske elevene har startet derivasjonen ved å anvende kvotientregelen, men uten å komme fram til rett svar. Det er bare Nederland som har flere elever med denne typen feilsvar. Også dette resultatet tyder på at elevene i Norge har noen kunnskaper om derivasjon, men at de ikke er godt nok befestet.

Kalkulusoppgave 6 (MA23039)

$f(x) = e^{\cos x}$

Hva er $f'(x)$?

Ⓐ $e^{\cos x}$

Ⓑ $e^{-\sin x}$

Ⓒ $e^{\cos x} \cdot \sin x$

Ⓓ $-e^{\cos x} \cdot \sin x$

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	23	9	8	18	5	10
B	15	10	8	13	4	11
C	20	21	16	18	18	16
D*	40	58	65	50	73	59
Ikke svart	2	2	3	1	0	4

I denne siste av de frigitte oppgavene om derivasjon presterer igjen de norske elevene klart under det internasjonale gjennomsnittet, og denne gangen svakere enn alle referanselandene, inklusive Sverige. Det riktige svaret D velges av bare 40 % av de norske elevene, mot et internasjonalt gjennomsnitt på 59 %. Dette er en sammensatt funksjon, som man deriverer i to trinn. Først må man vite at den deriverte av eksponentialfunksjonen e^x er lik funksjonen selv. Videre må man vite at hvis eksponenten selv er et funksjonsutrykk, så skal man multiplisere med den deriverte av eksponenten (kjerneregelen for derivasjon). Og til slutt må man derfor kunne derivere den trigonometriske funksjonen cos x.

Den vanligste feilen for norske elever var at de valgte alternativ A. Første trinn i løsningen er da riktig. Vi kan anta at elevene vet at den deriverte av e^x er lik e^x. Men enten vet de ikke at de så må derivere eksponenten (kjernen) og multiplisere med denne, eller de glemmer det. Nesten like mange norske elever valgte alternativ C. Også disse elevene starter riktig, og de vet at man så skal multiplisere med den deriverte av kjernen. Feilen i dette alternativet er at den deriverte av cos x er satt til pluss sin x, og ikke til minus sin x som er det riktige. Begge disse feilene gjøres også av elever i andre land, forskjellen er bare at *langt flere* norske elever gjør dem, hele 43 %.

Det ser ikke ut som om kjerneregelen for derivasjon er godt befestet hos elevene i Norge, heller ikke hvordan man gjennomfører relativt elementære derivasjoner av funksjoner. I sammensatte funksjoner starter de opp på riktig måte, men glemmer så enten å derivere kjernen og multiplisere med denne, eller de gjør en elementær feil når de skal derivere kjernen. Også resultatene på andre oppgaver i TIMSS Advanced underbygger at norske elever har problemer med derivasjon, som for eksempel de to foregående kalkulusoppgavene.

Derivasjon er et eksempel på hva man kan kalle en *grunnleggende ferdighet* for elever på dette nivået, på tilsvarende måte som den lille multiplikasjonstabellen er en grunnleggende ferdighet for elever på lavere nivå i skolen. En effektiv strategi for innlæring av ferdigheter er systematisk trening over tid med sikte på *automatisering*. Målet er ikke automatisering i seg selv, men dette er en effektiv måte å frigjøre kognitiv kapasitet som kan brukes til å løse mer avanserte matematiske problemer (Björkquist, 2001; Grønmo, 2005; Schoenfeld, 1992). Denne rapporten tar også opp noen aspekter ved matematikkundervisningen, og det pekes da på at læringsstrategier som det å trene inn formler og framgangsmåter med sikte på å lære dem utenat, er lite brukt i Norge sammenliknet med andre land (se kapittel 8). Dette kan muligens forklare noe av det svake resultatet for norske elever på disse oppgavene.

Kalkulusoppgave 7 (MA23035)

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

A. Hva er verdiene av x i skjæringspunktene mellom grafen til f og x-aksen?

$x =$ ________________

B. Bestem maksimal- og minimalpunktene til grafen til f.

Maksimalpunkt(ene): ________________

Minimalpunkt(ene): ________________

Del A	**Norge**	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: Alle tre x-verdiene oppgis ($-\sqrt{2}$, 0 og $\sqrt{2}$)	34	10	42	40	41	36
Galt svar: Bare to x-verdier gitt	12	12	8	6	22	9
Andre gale svar	26	40	7	40	16	24
Ikke svart	29	37	43	15	21	31

Del B	**Norge**	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: Maksimum (0, 0), minima (–1, –1) og (1, –1)	26	7	12	11	34	19
Galt svar: To riktige ekstremalpunkter gitt	11	5	4	4	9	5
Galt svar: Oppgir bare x-verdier	4	7	12	6	9	7
Andre gale svar	26	35	16	53	24	32
Ikke svart	33	46	56	26	23	38

De norske elevene presterer på nivå med det internasjonale gjennomsnittet på A-oppgaven, 34 % riktig i Norge mot 36 % internasjonalt. Igjen ser vi at det bare er i Sverige av de valgte referanselandene at elevene presterer svakere enn de norske.

På del B ligger derimot de norske elevene over det internasjonale gjennomsnittet, og prosentandelen av de norske elevene som løser den riktig er bedre enn i alle referanselandene unntatt Nederland. Her kan man ta i betraktning at andelen av årskullet som er med i populasjonen i Nederland er langt lavere enn i Norge, 3,5 % mot 11 %. Tar man tilsvarende med i betraktningen av resultatene for de andre landene, er det norske resultatet ikke like oppmuntrende. Likevel må man kunne oppsummere at utregning av ekstremalpunkter er et område som norske elever behersker relativt godt sammenliknet med elever i andre land.

Her bør vi også huske på at denne oppgaven, særlig B-delen, ligger godt til rette for å kunne løses ved bruk av grafisk kalkulator. Det *kan* ha bidratt til at de norske elevene gjorde det nokså bra i forhold til det internasjonale gjennomsnittet. Men selv uten kalkulator er det litt spesielt at resultatet er såpass svakt, både i Norge og internasjonalt. Dette er en ganske standard oppgavetype, hvor elevene skal finne skjæringspunkter og ekstremalpunkter for en gitt funksjon. En funksjon med tre ekstremalpunkter kan vanskelig konstrueres enklere enn denne. Når andelen elever med riktig svar er så lav i flere land, kan det være at det å trene på løsing av slike oppgaver ikke tillegges stor vekt i undervisningen.

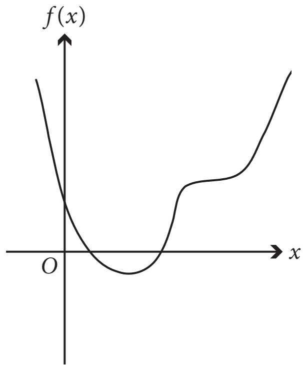
Det er imidlertid også viktig å bemerke at en relativt stor andel av elevene har valgt å ikke svare på denne oppgaven. Det kan skyldes at oppgaven er vanskelig, men som vi tidligere har kommentert i forbindelse med enkelte algebraoppgaver, er dette en oppgave som bare forekommer i ett av de fire oppgaveheftene, og der er den en av de siste oppgavene. Elevene kan ha hatt dårlig tid mot slutten av testen.

Kalkulusoppgave 8 (MA23151)

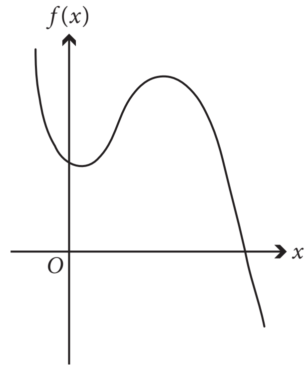
Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene?

$$f(-1) > 0,\ f(3) < 0,\ f'(5) = 0,\ f''(5) < 0$$

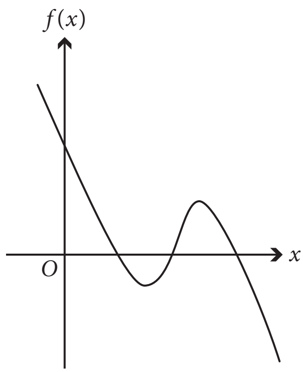
Ⓐ



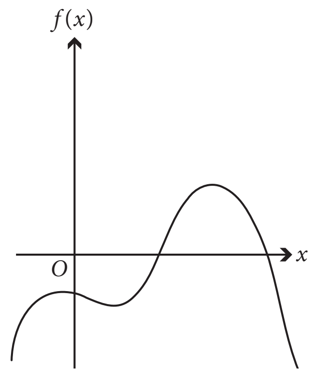
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ



	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	12	14	12	16	18	14
B	18	17	10	17	5	12
C*	31	36	40	47	61	46
D	22	20	15	13	5	15
Ikke svart	18	14	24	7	11	14

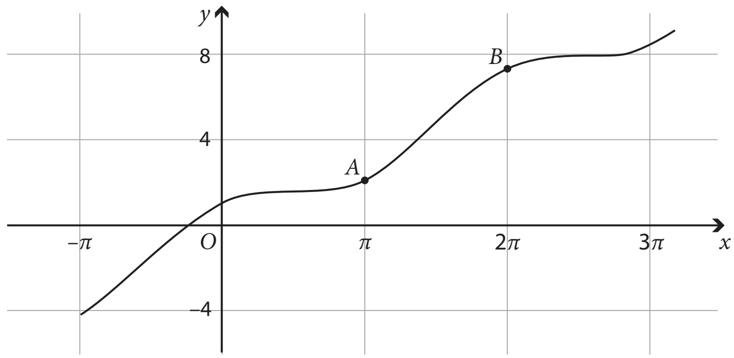
På denne oppgaven framstår resultatet for de norske elevene som klart svakere enn det internasjonale gjennomsnittet, og svakere enn alle referanselandene. Elevene skal velge hvilken graf som kan passe med de fire oppgitte egenskapene. To av egenskapene dreier seg om forholdet mellom x-verdi og funksjonsverdi, de to siste gjelder hvilke verdier den første- og annenderiverte har når x-verdien er 5. Oppgaven er i TIMSS Advanced plassert i den kognitive kategorien Resonnering (beskrevet i kapittel 12). For å løse oppgaver i denne kategorien er det ikke tilstrekkelig at elevene har visse faktakunnskaper eller trening i standard løsningsteknikker. Denne oppgaven krever mer, her må elevene selv analysere seg fram til en mulig løsning.

Selv om det norske resultatet på forrige kalkulusoppgave vanskelig kunne karakteriseres som godt, framstår det likevel som klart bedre i et internasjonalt perspektiv enn resultatet på denne oppgaven. Resultatet er slående likt for Norge og Sverige når det gjelder prosentandelen elever som velger de ulike alternativene. Den største forskjellen er at 5 prosentpoeng flere av de svenske elevene velger riktig svaralternativ, mens andelen elever som velger de andre alternativene er så godt som lik for alle feilsvar. Særlig i Norge og Sverige har en ganske stor del av elevene, rundt 1/5, valgt alternativ D. Dette alternativet oppfyller alle krav bortsett fra det første, som det er mulig at elevene har oversett etter å ha lett seg fram til en mulig graf som har alle de andre tre egenskapene.

Når man kjenner til den store utbredelsen og bruken av kalkulator i norsk og også i svensk skole (se kapitlene 8 og 9), er det fristende å stille spørsmål om det svake resultatet på denne oppgaven kan ha noen sammenheng med at det ikke ligger til rette for å bruke kalkulator for å løse den. I kommentarene til kalkulusoppgave 7, og da særlig til del B, ble det nettopp pekt på at noe av årsaken til de norske elevenes relativt gode resultat kunne være at oppgaven ligger godt til rette for kalkulatorbruk. Sammenlikner en resultatene på kalkulusoppgavene 7 og 8 kan det tyde på at norske elever presterer spesielt svakt på oppgaver hvor det ikke ligger til rette for enkel bruk av kalkulator.

Det blir interessant å se om den nylig vedtatte endringen av eksamen – fra fri bruk av både kalkulator og formelsamling på alle prøver og eksamener til en todeling hvor én del er uten hjelpemidler og én del er med – kan bidra til bedre norske elevprestasjoner i matematikk. Bruk av hjelpemidler som kalkulator kan være både positivt og negativt. Det er for eksempel positivt hvis elevene lærer seg å bruke kalkulator for å løse mer komplekse problemer enn de ellers ville kunne gjøre, eller hvis den brukes for å utvikle solide matematiske begreper hos elevene. Tilsvarende negativt kan det være om en ukritisk bruk fører til at elevene bruker den som en krykke, slik at for eksempel viktige grunnleggende ferdigheter ikke trenes inn. Spørsmål i tilknytning til bruk av kalkulator i elevenes læring av matematikk blir nærmere drøftet i kapitlene 8, 9 og 11.

Kalkulusoppgave 9 (MA23198)



Sofia studerer grafen til funksjonen $y = x + \cos x$ vist ovenfor. Hun sier at grafen har samme stigningstall i punkt *A* og punkt *B*. Forklar hvorfor hun har rett.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar	9	22	19	10	53	26
Galt svar	62	60	13	66	44	45
Ikke svart	30	19	69	24	3	29

I denne oppgaven blir elevene presentert for grafen til en trigonometrisk funksjon, og de møter påstanden at stigningstallet er det samme i to gitte punkter. Elevene skal gi en akseptabel forklaring på hvorfor dette er riktig. Det ligger ikke til rette for å løse oppgaven ved enkel bruk av kalkulator, og det er stort sett ingen elever i noen av de deltakende landene som har gjort dette. Oppgaven krever at elevene forstår hvordan begrepet *stigningstall* forholder seg til begrep som *derivert* og *tangent* i et punkt, og at de kan bruke denne kunnskapen til å resonnere seg fram til og formulere en holdbar forklaring.

For å løse oppgaven kan elevene finne stigningstallet i hvert av punktene ved å derivere funksjonen og sette de aktuelle x-verdiene inn i uttrykket for den deriverte. Deriverer de funksjonen riktig, får de $y' = 1 - \sin x$. I punkt A er $x = \pi$ og i punkt B er $x = 2\pi$. Siden $\sin \pi = \sin 2\pi = 0$, vil den deriverte ha verdien 1 i begge punktene. Sofia har derfor rett i det hun påstår.

Det er bare 9 % av de norske elevene som klarer å løse oppgaven, mot et internasjonalt gjennomsnitt på 26 %. Av referanselandene gjør alle det markant bedre enn Norge, bortsett fra Slovenia som ligger på samme nivå. Tar man med i betraktning den høye andelen av årskullet som er med i populasjonen i Slovenia, framstår det norske resultatet som det klart svakeste i et internasjonalt perspektiv. Norske lærere svarer at så godt som alle elever har blitt undervist i hvordan de kan bruke den deriverte til å løse problemer, mens lærere i Slovenia oppgir at det bare er 65 % av deres elever har fått slik undervisning. Nederland gjorde det best på oppgaven, med over halvparten av elevene som ga rett svar. Her må man igjen ta med i betraktning at det i Nederland bare er 3,5 % av årskullet som er med i populasjonen som testes, så utvalget i Nederland er mer elitistisk enn i Norge og de andre referanselandene. Sverige gjorde det klart bedre enn Norge på denne oppgaven og ligger nær det internasjonale gjennomsnittet.

I alle landene unntatt Italia var det en relativt stor andel av elevene som prøvde seg på oppgaven uten å greie å løse den. Det var også en relativt stor andel elever i alle landene unntatt Nederland som ikke prøvde å løse oppgaven. Italia utmerket seg som det landet som hadde den største andelen av elever som ikke svarte på oppgaven.

Som det ble kommentert til kalkulusoppgave 8 er det også her fristende å reise spørsmålet om noe av grunnen til det svake resultatet for de norske elevene kan skyldes at heller ikke denne oppgaven legger opp til en enkel løsning ved hjelp av kalkulator.

Kalkulusoppgave 10 (MA23042)

Hva er $\int \frac{x^2+2}{x} dx$? $(x > 0)$

Ⓐ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^2} + C$

Ⓑ $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln x + C$

Ⓒ $\frac{1}{2}x^2 + \ln 2x + C$

Ⓓ $\frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + C$

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	9	16	9	7	13	12
B*	49	41	73	64	59	54
C	20	22	9	13	19	15
D	13	14	3	9	6	8
Ikke svart	9	7	7	7	3	11

Denne oppgaven tester elevenes kunnskaper i *integrasjon*. Her dreier det seg om et *ubestemt integral*, altså et integral uten integrasjonsgrenser. Da handler oppgaven om det motsatte av derivasjon, og dette kalles derfor ofte *anti-derivasjon*. Den deriverte av en funksjon er kjent (i dette tilfellet $\frac{x^2+2}{x}$), og elevenes oppgave er å finne ut hva funksjonen selv er. Dette er en flervalgs-oppgave, så elevene skal velge hvilket av de oppgitte alternativene som er resultatet av integrasjonen. Siden den deriverte av en konstant er null, finnes det uendelig mange antideriverte til den oppgitte funksjonen; derfor inneholder svaralternativene en konstant C.

Riktig svar er alternativ B, og det kan finnes på flere måter. Siden integrasjon er det motsatte av derivasjon kan man for eksempel derivere de oppgitte svaralternativene og se hvilket alternativ som gir det funksjonsutrykket som skal integreres. En annen mulighet er å skrive $\frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$, som er et enklere uttrykk å antiderivere.

Det er 49 % av de norske elevene som har valgt riktig svaralternativ, og resultatet for Norges del framstår som svakere enn både det internasjonale gjennomsnittet og alle referanselandene unntatt Sverige. Vi har tidligere sett at norske elever presterer relativt dårlig på de frigitte oppgavene i derivasjon (se for eksempel kalkulusoppgavene 5 og 6). Det svake resultatet på denne oppgaven samsvarer således godt med tilsvarende svake resultater i derivasjon.

Kalkulusoppgave 11 (MA23041)

Hva er $\int e^{1+4x}dx$?

Ⓐ $\frac{1}{4}e^{1+4x}+C$

Ⓑ $e^{1+4x}+C$

Ⓒ $4e^{1+4x}+C$

Ⓓ $e^{x+2x^2}+C$

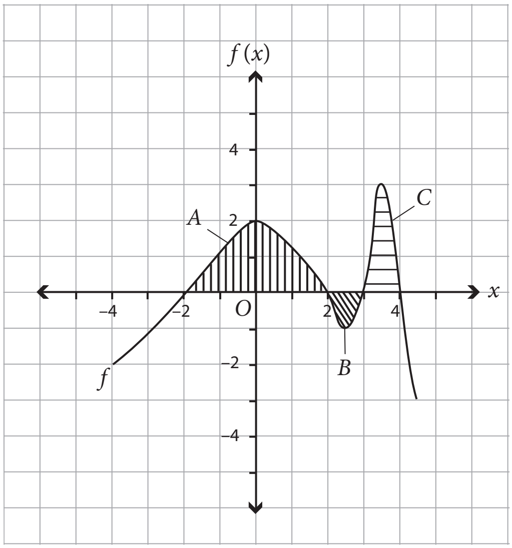
	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A*	41	22	39	31	43	36
B	17	21	17	30	9	17
C	20	26	18	19	20	18
D	8	9	6	11	7	9
Ikke svart	14	22	20	10	22	21

Også i denne integrasjonsoppgaven skal elevene velge hvilket av fire oppgitte svaralternativer som er riktig. Oppgaven kan, som den forrige oppgaven, løses ved at elevene deriverer de oppgitte svaralternativene og ser hvilket alternativ som gir det funksjonsuttrykket som skal integreres. En annen mulighet er å integrere funksjonen ved variabelsubstitusjon, en teknikk de norske elevene skal være kjent med. Hvilken metode som er brukt, kan vi ikke si noe om ut fra resultatene på en slik flervalgsoppgave.

Riktig svar er alternativ A, og 41 % av de norske elevene valgte dette svaralternativet. Resultatet for de norske elevene på denne oppgaven framstår som noe bedre enn det internasjonale gjennomsnittet, og på nivå med og til dels bedre enn referanselandene hvis vi sammenlikner direkte. Tar man hensyn til hvor stor prosentandel av elevene i det aktuelle årskullet som er med i populasjonen i de ulike landene, blir resultatet noe mindre bra for de norske elevene sammenliknet med for eksempel Italia.

I Norge var integrasjon ved substitusjon pensum i 3MX. Det kan da tenkes at dette er kunnskap som er ganske frisk i minnet hos elevene, noe som dermed kan ha positiv effekt på prestasjonen til norske elever på denne oppgaven. I kommentarene til andre oppgaver, for eksempel i derivasjon, ble det bemerket at siden derivasjon var pensum i 2MX, kan mangel på vedlikehold av tidligere innlærte ferdigheter ha vært en medvirkende årsak til svake norske resultater. Resultatet på denne oppgaven kan bidra til å styrke argumentet om at innlært kunnskap må vedlikeholdes; elevene presterer best på det de har frisk i minne.

Kalkulusoppgave 12 (MA23050)



Områdene mellom grafen til f og x-aksen er vist ovenfor. De har følgende arealer: $A = 4{,}8$ enheter, $B = 0{,}8$ enheter og $C = 2$ enheter.

Hvilken verdi har det bestemte integralet $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

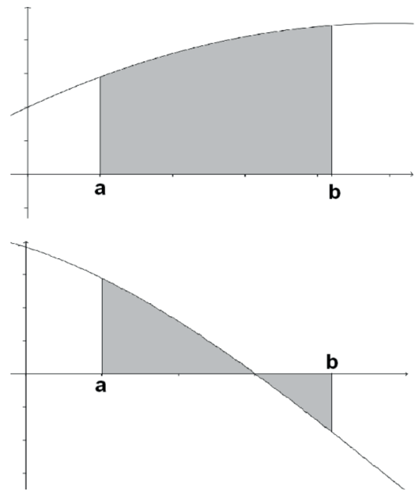
Ⓐ 5,6

Ⓑ 6,0

Ⓒ 6,8

Ⓓ 7,6

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	4	11	5	3	4	6
B*	23	26	27	32	36	31
C	19	21	14	15	13	15
D	36	20	20	28	30	26
Ikke svart	18	21	34	21	18	23



Denne oppgaven tar sikte på å undersøke elevenes forståelse av *bestemt integral*, mer presist deres forståelse av sammenhengen mellom det bestemte integralet og *areal*. Den øverste figuren i margen viser grafen til en positiv, kontinuerlig funksjon *f*. Arealet mellom *x*-aksen og grafen til *f* fra $x = a$ til $x = b$ er gitt ved det bestemte integralet $\int_a^b f(x)dx$. For funksjoner som er både positive og negative, slik som den nederste funksjonen i margen og funksjonen i denne oppgaven, er det bestemte integralet $\int_a^b f(x)dx$ = arealet over aksen – arealet under aksen. Har man en klar forståelse av dette, er denne oppgaven enkel hoderegning. Man legger sammen de to arealene over *x*-aksen (4,8 enheter og 2 enheter) og trekker fra det ene arealet under *x*-aksen (0,8 enheter) og får svaret 6,0.

Oppgaven viste seg å være ganske vanskelig i de fleste landene. Det internasjonale gjennomsnittet er bare 31 %. Det norske resultatet er i underkant av det internasjonale gjennomsnittet og resultatene i referanselandene. Det tyder på at norske elever har manglende forståelse av den typen begreper som oppgaven tester. I den internasjonale rapporten blir denne oppgaven brukt som eksempel på hva en elev på *avansert kompetansenivå* kan, et nivå som bare én prosent av norske elever nådde opp til. Resultatet på denne oppgaven samsvarer derfor med det generelt svake resultatet til norske elever.

De gale svaralternativene skulle gi diagnostisk informasjon ved å fange opp vanlige feil eller misoppfatninger hos elevene. Elever som velger alternativ D skiller ikke mellom areal og bestemt integral, de bare legger sammen de tre oppgitte arealene når de blir bedt om å finne det bestemte integralet. Elevene vet ikke at det arealet som ligger under *x*-aksen må trekkes fra de arealene som ligger over *x*-aksen for å finne det bestemte integralet. Dette var det vanligste feilsvaret også internasjonalt, men det er verdt å merke seg at det var en *klart større* andel av de norske elevene enn i referanselandene som valgte dette alternativet. Det var også mange elever som valgte alternativ C. Disse elevene vet at areal og integral ikke er helt det samme, at man må ta hensyn til om arealet ligger over eller under *x*-aksen. Men istedenfor å trekke fra arealet under x-aksen for å finne det bestemte integralet, velger disse elevene å se bort ifra det, de bare legger sammen de arealene som er over x-aksen.

Kalkulusoppgave 13 (MA13024)

$\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx$ er lik

Ⓐ $-3\frac{1}{8}$

Ⓑ 1

Ⓒ $2\frac{5}{8}$

Ⓓ 4

Ⓔ $4\frac{1}{2}$

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	5	6	8	4	5	2	5
B*	64	54	42	46	44	88	51
C	13	18	25	10	16	6	14
D	6	5	6	8	8	1	6
E	6	9	11	8	12	2	9
Ikke svart	7	8	9	24	15	2	16

Dette er en flervalgsoppgave der elevene skal beregne et bestemt integral. Resultatene på forrige oppgave tyder på at de norske elevene ikke har en klar forståelse av sammenhengen mellom bestemt integral og areal under funksjonsgrafer. For å løse denne oppgaven trenger imidlertid elevene ikke å tenke på arealer. Det bestemte integralet kan beregnes direkte ved først å finne det ubestemte integralet, for så å sette inn x-verdiene 2 og 1 i dette uttrykket og trekke resultatene fra hverandre.

Tabellen viser at andelen norske elever som får oppgaven riktig, har sunket med 10 prosentpoeng fra 64 % i 1998 til 54 % i 2008. Selv om det også på denne oppgaven er tilbakegang fra 1998, presterer norske elever likevel i overkant av det internasjonale gjennomsnittet og bedre enn alle referanselandene unntatt Nederland. Siden dette er en flervalgsoppgave vet vi ikke hvordan elevene har gått fram for å løse den, men en mulig forklaring på det gode norske resultatet kan være at denne oppgaven ligger vel til rette for å løses ved hjelp av grafisk kalkulator. Man kan da enten tegne grafen til funksjonen og la kalkulatoren beregne verdien av arealet mellom grafen og x-aksen for de oppgitte verdiene, eller man kan få kalkulatoren til å beregne verdien av integralet uten å gå veien om grafen. Går vi tilbake til kalkulusoppgavene 10 og 11 med ubestemte integraler, ser vi at de norske elevene presterte dårligere der. Det kan da bemerkes at disse oppgavene ikke kan løses med grafisk kalkulator, men krever mer avanserte symbolbehandlende verktøy.

Kalkulusoppgave 14 (MA23158)

En bil begynner å bremse når den nærmer seg et veikryss. Når den har bremset i t sekunder, har bilen kjørt $s(t)$ meter, der $s(t) = -t^2 + 20t$. Hvor langt kjører bilen fra den begynner å bremse til den stanser?

Ⓐ –20 m
Ⓑ 10 m
Ⓒ 50 m
Ⓓ 100 m

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	12	9	9	9	10	12
B	18	26	19	28	21	24
C	32	30	23	37	20	22
D *	22	21	12	10	35	23
Ikke svart	16	15	38	17	14	20

I denne flervalgsoppgaven har man «bakt inn» det matematiske i en daglig kontekst, i dette tilfellet bilkjøring. For å løse oppgaven må elevene gjennomføre et resonnement i flere trinn. For det første må de vite at hastigheten til bilen er gitt ved den deriverte av posisjonsfunksjonen (strekningen) $s(t)$, det vil si at hastigheten er gitt ved $v(t) = s'(t) = -2t + 20$. Videre må de innse at bilen stanser når farten er null, og løse likningen $v(t) = 0$ for å finne ut hvor lang tid det tar før bilen stopper. Til sist må de sette denne verdien av t inn i uttrykket for $s(t)$ slik at de finner strekningen bilen har kjørt. Gjør man dette riktig får man svaret 100 m, altså svaralternativ D.

Denne oppgaven viste seg å være vanskelig, med en internasjonal løsningsfrekvens på bare 23 %. Både de norske og de svenske elevene presterer her på nivå med det internasjonale gjennomsnittet, og av referanselandene er det bare Nederland som gjør det bedre. Oppgaver av denne typen blir ofte betraktet som en del av fysikkfaget, og som fysikkoppgave er den ganske enkel. Man kan undre seg over hva som får en såpass stor andel av elevene til å velge alternativ A. Hvis man tolker dette svaret, indikerer det at bilen rygger. Det kan imidlertid tenkes at elevene blander dette sammen med at bremsing betyr negativ akselerasjon. Flest elever velger feilsvaret C. En mulig forklaring på dette kan være at elevene synes 100 m virker urealistisk langt, så da velger de heller alternativet ovenfor på 50 m.

En annen mulig forklaring på at mange elever ikke har fått til oppgaven kan være at de har problemer med å koble at farten må være null når bilen stopper. Selv om resultatet også her er svakt, er det relativt bedre for de norske elevene enn på mange andre oppgaver i matematikktesten i TIMSS Advanced.

Vi vet fra analyser basert på data fra studier i grunnskolen (som TIMSS og PISA) at norske elever presterer relativt sett noe bedre på oppgaver som handler om anvendt matematikk i en daglig kontekst, enn på oppgaver i det man kan kalle ren matematikk (Grønmo, 2005; Grønmo & Olsen, 2006; Olsen & Grønmo, 2006). De nordiske landene har vist seg å ha en profil i sin matematikkundervisning som legger relativt mer vekt på anvendt matematikk enn på ren matematikk. Dette kan gjenspeile at bruk av matematikk i dagliglivet har vært en drivende kraft i utviklingen av læreplaner i land som de nordiske (ibid.). At denne oppgaven faller noe bedre i smak hos de norske elevene enn hos elever i andre land, samsvarer derfor med hva andre studier har vist når det gjelder norske elevers prestasjoner i grunnskolen. Den daglige konteksten er i dette tilfellet knyttet til fysikkfaget. Det er lang tradisjon i Norge for å bruke slike kontekster i matematikk på videregående skole. For eksempel presiserer læreplanen i 2MX at de norske elevene skal «kunne tolke derivasjon i praktiske sammenhenger, blant annet knyttet til [...] fart og akselerasjon» (KUF, 2000, 2MX delmål 5h).

6 Prestasjoner på oppgaver i Geometri

Hovedforfatter: Torgeir Onstad

I dette kapittelet presenteres resultatene for de frigitte oppgavene i området Geometri i TIMSS Advanced 2008. For flervalgsoppgaver angis det hvor stor prosentandel av elevene som valgte de ulike svaralternativene. Når det gjelder de åpne oppgavene, er disse kodet etter et internasjonalt skjema, der kodene forteller både om svaret er riktig eller galt, og hvilken type svar det er (for eksempel hvilken metode som er brukt i løsningen eller hvilken feil som er begått). I presentasjonen av resultatene fra de åpne oppgavene gjengir vi ikke alle detaljene i kodeskjemaet, men beskriver sentrale trekk ved oppgaven og ulike kategorier av elevsvar sammen med en oversikt over hvor stor prosentandel av elevene som ga de ulike typene svar. Kodeskjemaene og prosedyrene for koding av de åpne oppgavene er nærmere beskrevet i kapittel 12.

For hver oppgave sammenliknes de norske elevenes prestasjoner med de valgte referanselandene. For trendoppgavene, det vil si oppgaver som var med både i 2008 og i 1995 (1998 i Norge), presenteres de norske resultatene fra begge disse studiene. Endringen i de norske elevenes prestasjoner er da en viktig del av drøftingen. Resultatene til de norske elevene relateres dessuten til læreplanen i 3MX og 2MX der det er relevant. For trendoppgavene er det aktuelt å trekke inn læreplanen både slik den opprinnelig var etter reformen i 1994 og slik den ble etter revisjonen i 2000.

Det er viktig å ha klart for seg at det kan være store variasjoner mellom resultater på enkeltoppgaver. Feilmarginene på prosentangivelsene i dette kapittelet er av størrelsesorden 5 prosentpoeng. Det tar vi hensyn til i kommentarene.

6.1 Emneområdet Geometri

Rammeverket for TIMSS Advanced ser på området Geometri som sammensatt av fire delområder: euklidsk geometri, analytisk geometri, trigonometri og vektorer. Elevene forventes blant annet å kunne bruke egenskapene til geometriske figurer og trigonometri i problemløsing, bevise enkle geometriske setninger, kjenne likningen for en sirkel i planet, løse trigonometriske likninger, og kunne regne med vektorer. For en nærmere beskrivelse henviser vi til rammeverket for TIMSS Advanced (Garden et al., 2006).

I den norske læreplanen for 2MX kan man i mål 3 (Geometri) lese at «Elevene skal kunne bruke trigonometri til å løse plangeometriske problemer, og de skal kunne regne med koordinatfrie og koordinatiserte vektorer i planet» (KUF, 2000). Dette videreføres i læreplanen for 3MX, der det fastslås at «Elevene skal kunne regne med trigonometriske funksjoner og kunne bruke dem til å løse praktiske problemer» (ibid., 3MX mål 4) og at «Elevene skal kunne regne med vektorer og parametriserte kurver i planet og i rommet» (ibid., 3MX mål 6). I all hovedsak passer emneområdet Geometri i TIMSS Advanced godt overens med den læreplanen de norske 3MX-elevene har fulgt.

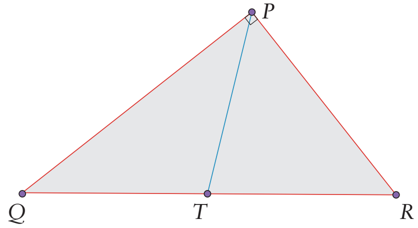
6.2 Geometrioppgavene

Geometrioppgave 1 (MA13008)

Trekanten PQR er en rettvinklet likebeint trekant med den rette vinklen i P.
Hvis PT er en median i trekanten, så er PT like lang som

Ⓐ PR
Ⓑ PQ
Ⓒ QR
Ⓓ QT

Dette er en klassisk geometrioppgave i planet. Elevene får ingen hjelp i form av en figur. De aller fleste vil nok være nødt til å tegne en hjelpefigur selv. La oss først se bort fra opplysningen 'likebeint' i oppgaveteksten. Denne opplysningen er nemlig ikke nødvendig for å løse oppgaven. Trekanten PQR kan da se slik ut:



I denne oppgaven er det helt avgjørende at man vet hva en *median* er. I så fall vet man at *T* må ligge midt på hypotenusen *QR*. Deretter er det enklest å resonnere ut fra det som er kjent som *Tales' setning*: nemlig at sentrum i den omskrevne sirkelen til en rettvinklet trekant ligger midt på hypotenusen. I dette tilfellet vil sentrum i den omskrevne sirkelen ligge i *T*, slik at *TQ*, *TP* og *TR* er radier i denne sirkelen og følgelig like lange. Dette viser at D er riktig svar.

Dersom vi i tillegg tar hensyn til at det ikke dreier seg om en vilkårlig rettvinklet trekant, men om en som er *likebeint*, så må katetene *PQ* og *PR* være like lange. Da vil medianen *PT* stå vinkelrett på hypotenusen *QR*, slik at medianen i tillegg blir høyde i trekanten. De to deltrekantene *TPQ* og *TPR* blir kongruente med hverandre og formlike med den store trekanten *PQR*. Dermed følger løsningen uten bruk av Tales' setning.

Alternativt kan riktig svar finnes ved måling på en nøyaktig tegnet figur.

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A	4	10	11	7	10	4	8
B	6	14	16	11	11	4	9
C	12	18	25	8	13	10	12
D*	72	49	41	65	63	79	65
Ikke svart	4	9	8	9	4	4	6

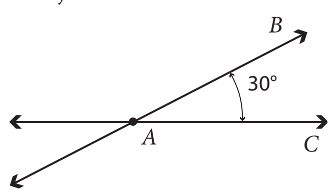
I den internasjonale rapporten er denne oppgaven brukt som et eksempel på hva en elev på *middels kompetansenivå* normalt skal kunne klare. Det internasjonale gjennomsnittet er på 65 %, og Norge skårer klart under dette. Av referanselandene er det bare Sverige som gjør det enda dårligere. Norge viser også en stor nedgang fra 1998, hele 23 prosentpoeng. Internasjonalt er det knapt noen forskjell mellom kjønnene, men i Norge skårer guttene nesten 10 prosentpoeng bedre enn jentene.

I visse, spesielle tilfelle kan *PR* eller *PQ* være lik *PT* – nemlig hvis vinkel *R* eller vinkel *Q* er lik 60°. Oppgaven handler imidlertid om en *likebeint* rettvinklet trekant, og da er det bare D som kan være korrekt svar. Det er likevel ikke A og B som er de mest populære feilsvarene. I nesten alle land er C den distraktoren som flest velger. Dette valget samsvarer på ingen måte med en forståelse av at *T* må ligge på hypotenusen.

Oppgaven er klassifisert i den kognitive kategorien *Resonnere*. Løsing av oppgaven krever både kunnskap om begrepet *median*, og anvendelse av denne kunnskapen til å sammenlikne linjestykker. Uten begrepskunnskap kan man ikke gjøre stort annet enn å gjette. Har man imidlertid denne kunnskapen, kan man resonnere eller undersøke situasjonen på ulike måter, slik vi har sett. Det er vanskelig å vite hva som er hovedgrunnen til den nokså svake norske prestasjonen, men en periode i norsk skole med liten vektlegging av å huske faktakunnskap – elevene har jo hatt elevbok og andre hjelpemidler – kan ha bidratt. I tillegg bør det bemerkes at setningen om periferivinkler og sentralvinkler, som Tales' setning er et spesialtilfelle av, var med i den opprinnelige læreplanen for 3MX. Med revisjonen i 2000 falt den imidlertid ut, slik at den trolig er ukjent for de norske elevene som deltok i TIMSS Advanced 2008. Oppgaven kan som nevnt også løses ved måling på en nøyaktig tegnet figur, men det er grunn til å tro at revisjonen av læreplanen delvis kan forklare den markante tilbakegangen i de norske elevenes prestasjoner på denne oppgaven.

Geometrioppgave 2 (MA13021)

Linja *AB* roteres i rommet om linja *AC* med en fast vinkel på 30°. Hvilken figur blir da beskrevet av linja *AB*?



Ⓐ en kjegle

Ⓑ en sylinder

Ⓒ en spiral

Ⓓ en sirkel

Ⓔ en kule

Mens den forrige oppgaven var todimensjonal – altså lå i planet – er denne oppgaven tredimensjonal. En plan figur, nemlig linja *AB*, roterer i rommet. Eleven skal navngi den romlige figuren som dermed blir tegnet (eller «beskrevet»).

Dersom eleven tenker på *linjestykket AB*, blir det en endelig kjegle med toppunkt i A og akse langs AC, og vi kan forestille oss en grunnflate til høyre i figuren. Dersom eleven tenker på den uendelige *strålen* fra A og gjennom B, blir figuren en kjegle med toppunkt i A og akse langs AC, og som fortsetter ubegrenset mot høyre. Og dersom eleven tenker på *linja* gjennom A og B, blir figuren en dobbeltkjegle, det vil si to kjegler med felles toppunkt i A og akse gjennom A og C, og som fortsetter ubegrenset både til venstre og til høyre. I alle fall må A bli riktig svar på oppgaven.

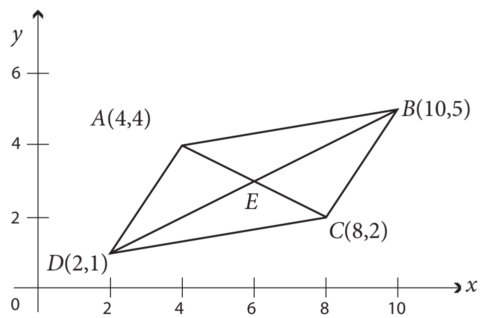
	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A*	83	67	74	70	54	80	65
B	3	4	3	5	9	3	5
C	2	7	7	8	12	5	8
D	9	17	12	10	19	10	15
E	1	3	2	3	4	2	4
Ikke svart	1	1	2	4	1	1	3

Norge har gått klart tilbake i forhold til 1998, men skårer likevel på nivå med det internasjonale gjennomsnittet. Her skårer jenter og gutter omtrent likt, både internasjonalt og i Norge, og to tredeler av de norske elevene greier denne oppgaven. Av referanselandene er det bare Slovenia som skårer lavere enn oss.

Vi ser at det er alternativ D som er det hyppigst valgte feilsvaret i alle land. Hvis eleven konsentrerer seg om bevegelsen til punktet B, blir det en sirkel om linja AC. Dersom man misforstår oppgaven og ser på en rotasjon i planet, vil punktet B beskrive en sirkel om A. Begge feil gir svaralternativet D.

Geometrioppgave 3 (MA13029)

I firkanten *ABCD* skjærer diagonalene *AC* og *BD* hverandre i punktet *E*.
BEVIS at *E* er midtpunktet på *AC* og *BD*. Vis hvordan du kom fram til svaret.



Det er få oppgaver i TIMSS Advanced som direkte spør etter bevis, men dette er en av dem. En firkant er gitt ved koordinatene til de fire hjørnene. Det skal bevises at skjæringspunktet mellom de to diagonalene halverer begge diagonalene. Dette er naturlig nok en åpen oppgave der eleven selv skal formulere svaret sitt.

Kodebeskrivelsen for denne oppgaven skiller mellom riktig, delvis riktig og galt svar.

Et riktig svar (2 poeng) krever «et fullstendig bevis». Men det er romslighet i hva slags resonnement som godkjennes som fullstendig bevis. Man kan for eksempel regne ut koordinatene til midtpunktet på hver av diagonalene og påpeke at disse faller sammen. Eller man kan forklare at *ABCD* må være et parallellogram og henvise til en setning som sier at diagonalene i et parallellogram halverer hverandre. Det er mulig å regne med de oppgitte koordinatene direkte eller benytte seg av vektorer.

Et delvis riktig svar (1 poeng) må ha noe substansielt riktig uten å være et fullstendig bevis. Man kan for eksempel lese av koordinatene til skjæringspunktet *E* og vise at det ligger midt på den ene av diagonalene.

	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
Riktig svar	22	15	9	20	23	33	30
Delvis riktig svar	13	7	3	6	7	13	8
Galt svar	21	40	45	22	35	43	30
Ikke svart	44	38	44	52	35	12	31

Norge skårer langt under det internasjonale gjennomsnittet. Av referanselandene er det bare Sverige som gjør det enda dårligere. Faktisk er Sverige og Norge dårligst av samtlige deltakerland på denne oppgaven. Norge viser også en tydelig tilbakegang fra 1998. Det er relativt liten forskjell mellom kjønnene. (Men i Nederland gjør jentene det 8 prosentpoeng bedre enn guttene på denne oppgaven.)

Bevis har spilt en varierende rolle i norske læreplaner og norsk matematikkundervisning (Solvang, 1986; Olsrud, 2009). Bevisets betydning for matematikken som fag drøftes av filosofer (Lakatos, 1976; Sandmel, 2000). Fagdidaktiske forskere bekrefter at resonnement og bevis ofte faller vanskelig for elever; av dette konkluderer noen med å advare mot sterk vektlegging av bevis i matematikkundervisningen, mens andre forsvarer bevisets plass og betydning for å utvikle en solid forståelse for matematikk og matematikkfagets egenart (Hanna, 1996, 2008; Mariotti, 2006; Brodie, 2010; Beck, 1996).

Det er tegn som tyder på at bevis og resonnement er i ferd med å bli noe styrket i matematikkundervisningen. Vi ser internasjonale signaler i denne retningen (NCTM, 2000, 2009). Det er i pedagogiske og fagdidaktiske miljøer en økt oppmerksomhet på språkets betydning i læreprosessen (for eksempel med henvisning til Vygotsky, 2001), og vi ser at både muntlighet og skriftlighet er tatt inn som grunnleggende ferdigheter i LK06. Skal språket gis en aktiv og sentral plass i matematikklæringen, er det naturlig at forklaringer, begrunnelser og resonnementer verbaliseres.

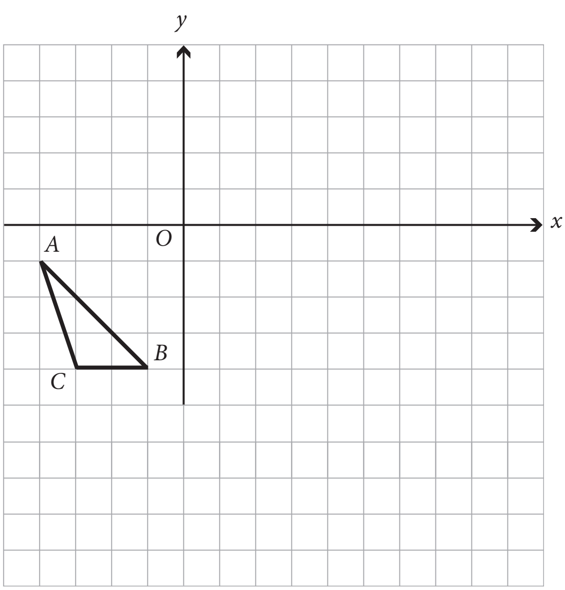
Geometrioppgave 4 (MA13026)

Dette er en oppgave i translasjonsgeometri. En oppgitt trekant skal i del A speiles om en rett linje, og i del B roteres om et punkt. Begrepene som inngår er enkle, og de behandles i Norge på tidligere trinn enn i 3MX. Begge svarene skal tegnes inn i samme koordinatsystem, og det viser seg at de er delvis overlappende. Derfor kreves det en viss grad av konsentrasjon og systematikk for å holde orden på svarene.

De to delene av oppgaven ble kodet separat. Det var koder for forskjellige typer feilsvar, men vi skiller ikke mellom dem her.

A. Trekanten ABC speiles om y-aksen. Tegn inn trekanten $A'B'C'$ som framkommer ved denne speilingen, og skriv A', B' og C' på hjørnene.

B. Trekanten ABC roteres 90° mot klokka om origo, O. Tegn inn trekanten $A''B''C''$ som framkommer ved denne rotasjonen, og skriv A'', B'' og C'' på hjørnene.



Del A	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
Riktig svar: Trekant med koordinatene *A*'(4,–1), *B*'(1,–4) og *C*'(3,–4)	71	63	19	55	70	81	53
Galt svar	22	30	48	30	27	17	32
Ikke svart	7	7	33	15	3	2	14

Del B	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
Riktig svar: Trekant med koordinatene *A*''(1,–4), *B*''(4,–1) og *C*''(4,–3)	13	15	10	15	10	37	17
Galt svar	67	64	48	49	70	56	53
Ikke svart	20	22	43	36	21	7	30

Samtlige land viser en markant nedgang i skår fra del A til del B. Speiling ser altså ut til å være betydelig enklere enn rotasjon. Men det kan også tenkes at fordi svaret i B falt oppå svaret fra A, har en del elever gitt opp mens de holdt på med B.

Norge skårer over det internasjonale gjennomsnittet på del A, og omtrent likt med det internasjonale gjennomsnittet på del B. Vi har gått noe tilbake på del A siden 1998, men holdt oss på omtrent samme nivå i del B. Norske jenter og gutter gjør det like godt på del A, mens guttene gjør det klart best på del B (19 % mot 9 %). Dette gjelder ikke bare de norske elevene; i samtlige referanseland presterer guttene klart bedre enn jentene på denne oppgaven. Det er i denne sammenheng viktig å påpeke at det ikke er signifikante kjønnsforskjeller i den samlede matematikkskåren til de norske elevene (se også kapittel 10). Likevel er det altså slik at man kan finne tydelige kjønnsforskjeller på noen av enkeltoppgavene.

Geometrioppgave 5 (MA13007)

Den ene siden i en likesidet trekant ligger langs x-aksen. Da er summen av stigningstallene til de tre sidene lik

Ⓐ 0

Ⓑ -1

Ⓒ 1

Ⓓ $2\sqrt{3}$

Ⓔ $1+2\sqrt{3}$

Dette er en oppgave der begrepsforståelse er mye nyttigere enn regneferdigheter. Det er selvsagt mulig å tegne en nøyaktig eksempelfigur, beregne de tre stigningstallene, og til slutt legge dem sammen. Men en trekant som denne kan ikke ha heltallige koordinater i alle hjørnene. Det blir derfor en del arbeid å gjøre det på denne måten. Dersom stigningstallene beregnes som tangensverdiene til henholdsvis 0º, 60º og –60º, blir regningen atskillig enklere.

Men hvis man innser at siden langs x-aksen har stigningstall 0, og at de to andre trekantsidene er like bratte, bare «hver sin vei», så følger det at disse to har motsatt like store stigningstall, og dermed at summen må være 0, det vil si svaralternativ A. Slik kan man fullstendig unngå regning på denne oppgaven.

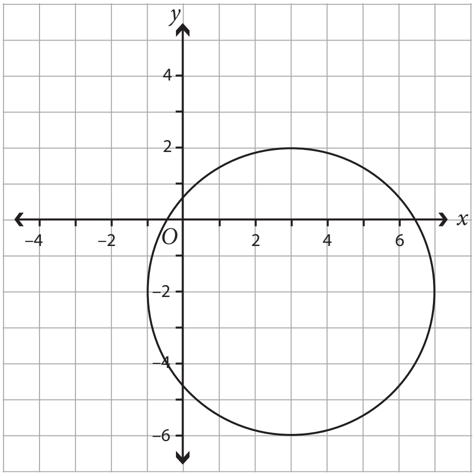
	Norge		Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
	1998	2008					
A*	74	52	45	42	53	75	50
B	1	1	6	3	3	1	3
C	11	18	21	10	18	6	13
D	8	14	13	15	14	10	16
E	2	6	7	6	5	4	7
Ikke svart	3	9	8	25	7	4	11

I den internasjonale rapporten er denne oppgaven brukt som et eksempel på hva en elev på *høyt kompetansenivå* normalt skal kunne klare. Norge har markant tilbakegang i forhold til 1998, men skårer likevel på linje med det internasjonale gjennomsnittet. Sånn sett er denne oppgaven blant de mer positive i testen, sett med norske øyne. Dette synspunktet forsterkes av det faktum at elevene neppe har hatt vesentlig nytte av kalkulator her.

I samtlige land som deltok i TIMSS Advanced, skårer guttene bedre enn jentene på denne oppgaven. Det gjelder også Norge, selv om forskjellen bare er på 5 prosentpoeng.

Det er sjelden at så mange som en firedel av elevene lar være å svare på en flervalgsoppgave, slik tilfellet er med Italia her. Det er rimelig å anta at oppgaven har virket svært fremmedartet for italienske elever og kanskje er perifer i forhold til deres læreplan. Resultatet bør derfor neppe tillegges stor vekt for deres del.

Geometrioppgave 6 (MA23055)



Hva er likningen til sirkelen ovenfor?

Ⓐ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$

Ⓑ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

Ⓒ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

Ⓓ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Dette er en oppgave i analytisk plangeometri. I senere år har det vært lite slik geometri i den norske skolematematikken. I den reviderte versjonen av R94 som disse elevene fulgte, står det i mål 6c for 3MX at elevene blant annet skal «kjenne ligningen for en sirkel i planet» (KUF, 2000). Dermed ligger denne oppgaven innenfor den norske læreplanen.

Dersom man vet at

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

er likningen for en sirkel med sentrum i punktet (a, b) og med radius r, er oppgaven relativt enkel å løse. På figuren kan vi identifisere sirkelens sentrum $(a, b) = (3, -2)$ og radius $r = 4$. Dermed blir sirkellikningen i dette tilfellet

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

Ved å multiplisere ut parentesene og rydde opp i uttrykkene får vi likningen i oppgavens alternativ D, som dermed blir riktig svar.

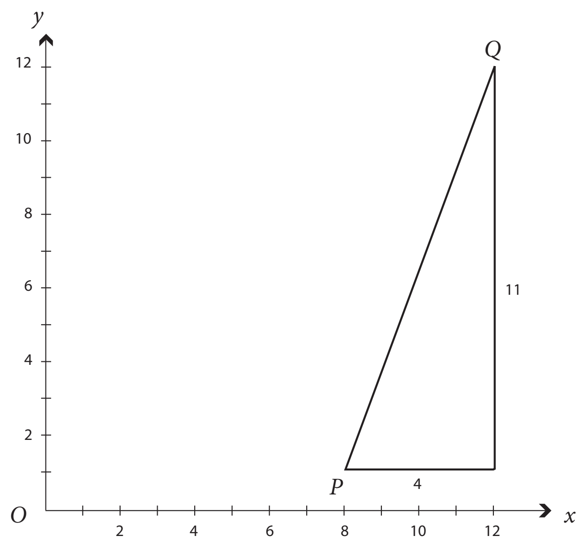
Alternativt kan man lese av koordinatene til et av punktene på sirkelen, for eksempel (–1, –2) eller (3, 2). Ved innsetting i de fire likningene er det bare den siste likningen som gir 0 på venstre side; med andre ord er D det eneste mulige svaret.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	12	11	8	12	9	11
B	23	15	12	19	12	16
C	27	35	26	27	25	23
D *	30	28	39	37	49	42
Ikke svart	9	10	15	6	6	8

Denne oppgaven var ny i 2008, så vi kan ikke studere utviklingen over tid. Av referanselandene er det bare Nederland som skårer over det internasjonale gjennomsnittet. Den nokså jevne fordelingen mellom svaralternativene kan tyde på at mange norske elever har gjettet på svaret. Dette kan delvis skyldes at undervisningen har gitt elevene lite trening i å manipulere algebraisk med slike likninger på hensiktsmessige måter. Men det tyder også på at norske elever i liten grad greier å resonnere i ukjente situasjoner.

Dette er en av de få oppgavene hvor jentene i Norge gjør det bedre enn guttene. Det eneste andre landet hvor dette er tilfelle, er Libanon.

Geometrioppgave 7 (MA23170)



En rett linje *l* går gjennom punktene *A* (1,–2) og *B* (3, 4).
Er linja *l* parallell med *PQ*?

Begrunn svaret ditt.

Dette kan se ut som en svært enkel oppgave i koordinatgeometri. To linjer (strengt tatt en linje *l* og et linjestykke *PQ*) er gitt. Det skal avgjøres om de er parallelle.

Det viser seg at disse linjene er «nesten» parallelle. En rask skisse kan derfor lett forlede en til å tro at de er parallelle. En nøyaktig figur vil vise at det er de ikke, men oppgaven gjør det ikke helt enkelt å tegne en nøyaktig figur, siden punktet *A* faller under førsteaksen.

En rask utregning viser at *PQ* har stigningstall $\frac{11}{4}$, og at *l* har stigningstall $\frac{6}{2} = \frac{12}{4}$. Siden stigningstallene er forskjellige, kan linjene ikke være parallelle. Det er også andre måter en kan begrunne svaret på. En mulighet er å beregne vinklene som de to linjene danner med førsteaksen (ved å betrakte stigningstallene som tangensverdier). En annen mulighet er å vurdere parallellitet ved å beregne skalarproduktet til retningsvektorer til de to linjene.

Denne oppgaven hadde to koder for riktig svar. Den første koden ble gitt for nei-svar (altså ikke parallellitet) begrunnet med stigningstall. Den andre koden ble gitt for nei-svar med annen korrekt begrunnelse. Videre var det tre koder for gale svar. Den første var for nei-svar uten noen holdbar begrunnelse. Den andre var for ja-svar (med eller uten forsøk på begrunnelse). Den siste ble gitt for alle andre gale og ufullstendige svar.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
Riktig svar: Nei, begrunnet med stigningstall	4	15	12	12	50	21
Riktig svar: Nei, begrunnet på annen måte	17	0	5	7	1	5
Galt svar: Nei, uten holdbar begrunnelse	15	17	8	18	9	11
Galt svar: Ja	21	14	17	41	7	19
Andre gale svar	8	8	8	5	2	6
Ikke svart	35	47	50	18	31	38

Når vi tolker denne tabellen, er det et forhold som vi må være klar over: Denne oppgaven var bare med i ett av oppgaveheftene, og i dette heftet var den plassert som aller siste oppgave. Knapp tid eller slitenhet kan ha ført til at en del studenter ikke rakk eller ikke orket å arbeide seriøst med denne oppgaven.

Når det er sagt, innholder tabellen interessante trekk. Norge og tre av referanselandene skårer i underkant av det internasjonale snittet. Nederland skiller seg imidlertid ut. Elevene der skårer for det første langt bedre enn det internasjonale snittet. Dessuten er det svært få som svarer galt. Av de som i det hele tatt har prøvd på oppgaven, er det altså en svært stor andel som svarer korrekt. Slovenia skiller seg ut med å ha svært mange elever som tror at linjene faktisk er parallelle. I Sverige og Italia er det bare omtrent halvparten av elevene som i det hele tatt har prøvd på oppgaven.

Norge skiller seg ut ved at det store flertallet av de elevene som greier oppgaven begrunner svaret på annen måte enn ved hjelp av stigningstall, for eksempel ved å vise at vinkelen mellom linjene ikke er 0°. Det kan skyldes arbeid med vektorer i 2MX; da lærer elevene å finne vinkelen mellom to vektorer ved hjelp av skalarproduktet. Av samtlige deltakerland er det bare Armenia som har tilsvarende fordeling (men med lavere prosentsatser).

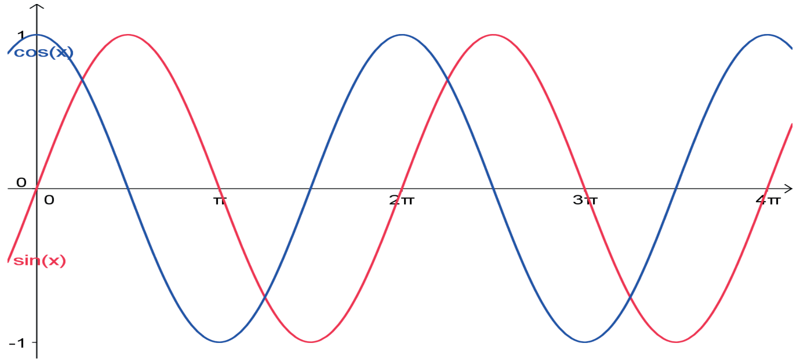
I de fleste land er det liten forskjell mellom resultatene til jenter og gutter på denne oppgaven. På Filippinene og i Armenia skårer guttene klart bedre enn jentene, og i Libanon skårer jentene klart best.

Geometrioppgave 8 (MA23080)

Hvor mange løsninger har likningen $\sin x + \cos x = 2$ i intervallet fra 0 til 8π?

- Ⓐ 0
- Ⓑ 2
- Ⓒ 4
- Ⓓ 8

Dette er en flervalgsoppgave i trigonometri. De norske elevene møtte trigonometriske funksjoner i 3MX, der læreplanen blant annet fastslår at elevene skal «kunne skrive om uttrykk fra formen $a \sin(cx) + b \cos(cx)$ til $A \sin(cx + \varphi)$ og kunne bruke resultatet til å analysere funksjoner og løse ligninger» (KUF, 2000, 3MX delmål 4e). For å løse denne oppgaven er det imidlertid ikke nødvendig å bruke denne teknikken. Det holder at man har kunnskaper om de grunnleggende egenskapene til de trigonometriske funksjonene sinus og cosinus, og at man kan kombinere enkle fakta i et resonnement. Nedenfor er grafene til $\sin x$ (rød) og $\cos x$ (blå) tegnet.



Vi ser (og elevene bør strengt tatt vite det uten å se på noen graf!) at begge funksjonene har maksimalverdi 1. Skal summen av de to funksjonene bli 2, må derfor begge funksjonene ha verdien 1 *samtidig* (for samme verdi av x). Figuren viser imidlertid at dette ikke kan være tilfelle, slik at summen sin x + cos x aldri kan bli lik 2. Det riktige svaret er derfor gitt ved alternativ A; likningen har ingen løsninger.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A*	33	45	44	28	87	46
B	7	12	13	17	2	11
C	34	28	21	35	7	24
D	23	12	10	11	4	12
Ikke svart	4	3	13	10	1	8

Denne oppgaven falt ut som middels vanskelig i mange land, noe det internasjonale gjennomsnittet på 46 % også viser. Av tabellen ser vi at de norske elevene presterer klart dårligere enn det internasjonale gjennomsnittet, og Norge ligger under alle referanselandene med unntak av Slovenia.

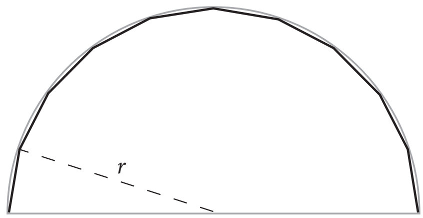
I både Norge og Slovenia har feilsvaret C blitt valgt av flere elever enn det riktige svaret A. Også i de andre referanselandene er C det vanligste feilsvaret. Intervallet fra 0 til 8π tilsvarer 4 perioder av sinus- og cosinusfunksjonene. Begge funksjonene oppnår sitt maksimum én gang i hver periode. Elever som ikke innser at funksjonene må ha denne maksimumsverdien samtidig, kan derfor lett velge dette alternativet.

Tabellen viser at også alternativ D har vært populært i Norge, faktisk mye mer populært enn i noen av referanselandene. Norske elever møtte trigonometriske likninger i 2MX, da gjerne i form av enkle likninger som for eksempel 4 sin $x = 2$. Læreplanen fastslår at elevene skal «kjenne den generelle definisjonen av sinus, cosinus og tangens og kunne utnytte symmetrier på enhetssirkelen til å finne vinkler i første omløp når verdien til noen av disse funksjonene er gitt» (KUF, 2000, 2MX delmål 3a). Gjennom arbeid med slike likninger vil elevene erfare at de som regel har to løsninger i første omløp. Likningen i oppgave 4 kan se nokså lik ut, og da kan det være lett å tro at også denne likningen har to løsninger i hvert omløp, som leder til alternativ D.

Oppgaven kan løses greit selv uten å huske eller innse at sinusfunksjonen og cosinusfunksjonen ikke begge kan anta verdien 1 for samme verdi av x. Ved å tegne grafen til $y = \sin x + \cos x$ på kalkulatoren vil man enkelt se at summen $\sin x + \cos x$ aldri kan bli lik 2. Det kan da virke overraskende at bare en tredel av de norske elevene fikk riktig løsning. I andre eksempler har vi sett at mange av de norske elevene har løst oppgavene grafisk på kalkulatoren, men det virker ikke som om det har skjedd i denne oppgaven. En mulig grunn til dette kan være at det her ikke er noe tydelig «hint» om at en grafisk framgangsmåte kan være fruktbar. Andre oppgaver «inviterer» tydeligere til kalkulatorbruk ved at teksten fokuserer på det grafiske, eller ved at elevene gjenkjenner problemsituasjoner som de er vant til å bruke kalkulatoren i. Når oppgaven derimot ikke har slike tydelige «hint», ser det ut til at de norske elevene i liten grad selv finner på å bruke kalkulatoren. Dette kan tyde på at norske elever ikke har høy *hjelpemiddelkompetanse*. De bruker kalkulatoren mye: 80 % av dem rapporterer at de har brukt en grafisk kalkulator (eventuelt med muligheter for symbolbehandling) når de arbeidet med oppgavene i TIMSS Advanced. Men de utnytter i liten grad kalkulatoren når de støter på oppgaver som stiller større krav til resonnement.

I samtlige deltakerland bortsett fra Italia har guttene gjort det bedre enn jentene på denne oppgaven. Forskjellen er størst i Slovenia, nemlig 13 prosentpoeng.

Geometrioppgave 9 (MA23021)



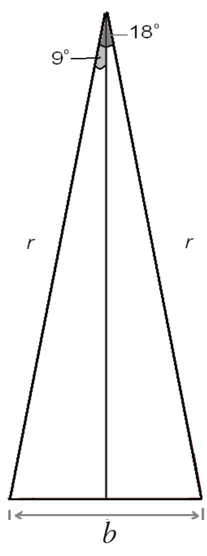
Figuren viser et halvsirkelformet rom sett ovenfra. En arkitekt vil montere 10 flate vinduer i rommet, som vist på figuren. Hvis radien i sirkelen er *r*, hvilken av formlene kan arkitekten bruke for å beregne bredden av hvert vindu?

Ⓐ $b = r \sin 9°$

Ⓑ $b = 2r \sin 9°$

Ⓒ $b = r \cos 18°$

Ⓓ $b = 2r \sin 18°$



Dette er en oppgave som dreier seg om å finne riktig trigonometrisk sammenheng i en trekant. Hjelpefiguren i margen viser en trekant med grunnlinje *b* (bredden av vinduet) og to like sider med lengde *r* (radien i halvsirkelen). Trekanten er altså likebeint, men ikke rettvinklet. Toppvinkelen i trekanten er her en tidel av 180º, altså 18º. Hver av de to vinklene ved grunnlinja (en korde i halvsirkelen eller et vindu i rommet) er 81º. Fordi trekanten ikke er rettvinklet, trekker vi hjelpelinja fra toppunktet (sentrum i halvsirkelen) til midt på vinduet. Denne linja deler den opprinnelige trekanten i to rettvinklede trekanter. Hver av disse har vinklene 90º, 81º og 9º. Tar vi utgangspunkt i vinkelen på 9º, vet vi at den motstående kateten er halve vinduet, og derfor har lengden $\frac{b}{2}$, mens hypotenusen er *r*. Definisjonen av sinus gir dermed

$$\sin 9^{\circ} = \frac{b}{2r}$$

som gir alternativ B som riktig svar.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	13	10	12	10	8	12
B*	18	22	22	26	36	26
C	42	42	28	40	32	32
D	22	22	21	20	22	21
Ikke svart	5	4	16	4	2	10

I den internasjonale rapporten er denne oppgaven brukt som et eksempel på hva en elev på *avansert kompetansenivå* normalt skal kunne klare. Som tabellen viser, presterer de norske elevene dårligere enn samtlige referanseland, og klart under det internasjonale gjennomsnittet. Faktisk svarer de norske elevene dårligst av samtlige deltakerland på denne oppgaven.

Et slående trekk er at i alle land (bortsett fra Iran) er alternativ C den mest attraktive distraktoren; i de fleste landene er C faktisk mer populært enn det korrekte svaret B. Vi vet at mange elever på lavere trinn har lett for å betrakte trekanter som rettvinklede. Hvis man feilaktig oppfatter trekanten i oppgaven som rettvinklet med katet b og hypotenus r, kan man få svaret i C – dersom man i tillegg bytter om sinus og cosinus.

I Norge og de fleste andre landene er det liten forskjell mellom kjønnene på denne oppgaven.

Geometrioppgave 10 (MA23182)

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

Hvilke verdier kan x ha mellom 0° og 360°?

(A) 30°, 150°

(B) 195°, 345°

(C) 30°, 150°, 210°, 330°

(D) 15°, 75°, 195°, 255°

Dette er en enkel trigonometrisk likning. I læreplanen for 3MX står det at elevene skal «kjenne de eksakte verdiene til sinus, cosinus og tangens til 0, 30, 45, 60 og 90 grader og kunne bruke disse verdiene til å finne vinkler i andre kvadranter og omløp» (KUF, 2000, 3MX delmål 4b). Siden sin 30° = $\frac{1}{2}$, passer denne likningen godt til den norske læreplanen. Den eneste kompliserende faktoren er at vinkelen i oppgaven er $2x$. Siden x skal ligge i første omløp, må $2x$ ligge i de to første omløpene. Det gir følgende mulige verdier for $2x$: 30°, 150°, 390° og 510°. Ved halvering ser vi at x-verdiene er gitt i oppgavens alternativ D.

	Norge	Sverige	Italia	Slovenia	Nederland	INT
A	16	19	20	20	19	17
B	7	10	8	6	5	6
C	24	19	15	26	15	17
D *	35	34	29	37	40	41
Ikke svart	18	18	29	12	21	19

Dette er en middels vanskelig oppgave. Både Norge og to av referanselandene svarer litt i underkant av det internasjonale gjennomsnittet. Nederland presterer omtrent som gjennomsnittet, mens Italia svarer en del svakere. Italia har også den største andelen elever som ikke har svart på oppgaven.

Distraktorene A og C har nokså høy popularitet. 30° og 150° er verdiene til $2x$ i første omløp, og inngår i begge disse svaralternativene. Når det gjelder alternativ C, kan det bemerkes at sin 210° = sin 330° = $-\frac{1}{2}$. Elever som valgte dette alternativet kan dermed ha oversett at sinusfunksjonen har negative verdier når vinkelen er mellom 180° og 360°. Det er altså noe fornuftig i begge disse svarene, men et hovedpoeng i oppgaven glipper.

I flere land er det markante kjønnsforskjeller i svarene på denne oppgaven, vanligvis i guttenes favør. Sterkest gjør dette seg gjeldende i Iran (19 prosentpoeng forskjell), Armenia (19 prosentpoeng) og Slovenia (13 prosentpoeng). De eneste landene med en viss overvekt i jentenes favør er Libanon (5 prosentpoeng) og Sverige (4 prosentpoeng). I Norge svarer guttene og jentene nesten helt likt.

7 Prestasjoner sett i sammenheng med bakgrunnsvariabler

Hovedforfatter: Ida Friestad Pedersen

I tillegg til de faglige oppgavene besvarte elevene et omfattende spørreskjema. Noen av spørsmålene handler om elevenes hjemmebakgrunn, som hjemmets kulturelle kapital (antall bøker og foreldrenes utdanningsnivå) og hvilket språk de snakker hjemme. Det dreier seg med andre ord om elevenes sosiokulturelle bakgrunn som kan knyttes til den sosiale lagdelingen i det norske samfunnet, og om språklige og kulturelle forskjeller knyttet til at elevene eller deres foreldre har sin bakgrunn fra et annet land. Andre spørsmål handler om hva som foregår i matematikktimene på skolen, hvor mye tid elevene bruker på ulike aktiviteter utenom skoletida, hvorfor de valgte å fordype seg i matematikk, og hvilke planer de har for framtida.

Dette kapittelet tar for seg noen sammenhenger mellom faglige prestasjoner og elevenes hjemmebakgrunn, samt hvor mye tid elevene bruker på ulike aktiviteter utenom skolen. I senere kapitler fokuserer vi på matematikkundervisningen i skolen (kapitlene 8 og 9) og på elevenes holdninger til matematikkfaget og videre studieønsker (kapittel 10).

7.1 Elevenes hjemmebakgrunn

7.1.1 Antall bøker i hjemmet

Et enkelt mål på elevenes sosiale bakgrunn, som svært ofte blir brukt i utdanningsforskning, er antall bøker familien har hjemme. I tidligere studier (TIMSS, PIRLS[4]) har det vist seg at elever fra hjem med god tilgang på boklige ressurser presterer bedre i matematikk, naturfag og lesing enn elever fra hjem med få bøker (Mullis et al., 2009). Det kan tenkes at dette også gjelder for elever som tar skolens mest avanserte matematikkurs.

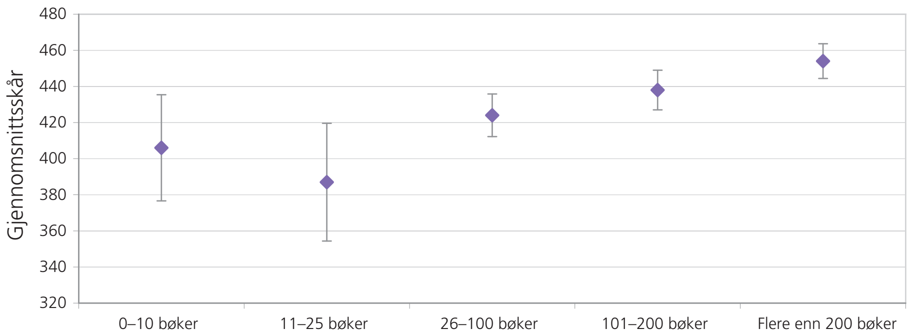
4 PIRLS står for *Progress in International Reading Literacy Study*, og er en annen av IEAs studier.

Elevene som deltok i TIMSS Advanced ble bedt om å anslå hvor mange bøker de hadde hjemme (ikke medregnet blader, aviser eller skolebøker). Svaralternativene var «0–10 bøker», «11–25 bøker», «26–100 bøker», «101–200 bøker» og «Flere enn 200 bøker». Tabell 7.1 viser hvordan de norske 3MX-elevene og elevene i referanselandene fordeler seg på disse svaralternativene. Vi ser at over halvparten av de norske elevene oppgir å ha flere enn 200 bøker hjemme, og at Norge og Sverige markerer seg som land der en stor andel av elevene kommer fra hjem med god tilgang på bøker.

Tabell 7.1 Antall bøker eleven oppgir at familien har hjemme. Tabellen viser hvor stor prosentandel av elevene i Norge og referanselandene som faller inn under hver av kategoriene.

	0–10 bøker	11–25 bøker	26–100 bøker	101–200 bøker	Flere enn 200 bøker
Norge	4	7	16	21	52
Italia	7	16	27	18	33
Nederland	5	12	26	21	36
Slovenia	3	14	38	25	21
Sverige	4	8	19	19	50

Figur 7.1 viser sammenhengen mellom antall bøker hjemme og matematikkprestasjonene til de norske 3MX-elevene. For hver gruppe av elever er det angitt gjennomsnittlig matematikkskår med 95 % konfidensintervall. (Det vil si følgende: Det gjennomsnittet som er oppgitt for en gruppe, er gjennomsnittsskår for elevene i denne gruppa innenfor det utvalget som er testet. Det oppgitte intervallet – altså konfidensintervallet – inneholder med 95 % sannsynlighet det virkelige gjennomsnittet for den tilsvarende gruppa i hele populasjonen.)



Figur 7.1 Sammenhengen mellom antall bøker hjemme og prestasjonene til de norske 3MX-elevene. 95 % konfidensintervaller for gjennomsnittsverdiene er også vist.

Som figuren viser, er gjennomsnittsskåren til de elevene som faller inn i kategoriene «0–10 bøker» og «11–25 bøker» beheftet med relativt stor usikkerhet, noe som skyldes at svært få norske elever faller i disse kategoriene (slik tabell 7.1 viser). Vi ser imidlertid at det er en nokså klar tendens til at elever fra hjem med mange bøker som gruppe skårer høyere enn elever fra hjem med få bøker.

I denne boka brukes *Pearsons produktmoment-korrelasjon* som et mål på samvariasjon mellom variabler. Dette er en standardisert koeffisient som kan ha verdier fra –1 til +1. En korrelasjon på 1 betyr at det er fullstendig positivt sammenfall mellom variablene, det vil si at høye verdier på den ene variabelen hører sammen med høye verdier på den andre og lave verdier på den ene sammen med lave verdier på den andre. Motsatt uttrykker en korrelasjon på –1 et fullstendig negativt sammenfall, det vil si at høye verdier på den ene variabelen hører sammen med lave verdier på den andre. I samfunnsvitenskapelig forskning kan man i grove trekk si at korrelasjonskoeffisienter mellom 0 og 0,2 (positivt eller negativt) viser en svak samvariasjon, 0,3 til 0,4 er en moderat samvariasjon, og over 0,5 viser en sterk samvariasjon (Johannessen, Tufte & Kristoffersen, 2006).

Tabell 7.2 viser korrelasjonene mellom matematikkskår og antall bøker hjemme for Norge og de fire referanselandene. Det er viktig å være klar over at korrelasjon ikke sier noe om en eventuell kausal sammenheng. (At «korrelasjonen er signifikant på 0,01-nivå» betyr at det er mindre enn 1 % sannsynlighet for at det egentlig ikke er noen korrelasjon i populasjonen, og at verdien som er beregnet her, bare er et utslag av tilfeldighet.)

Tabell 7.2 Korrelasjon mellom antall bøker i hjemmet og prestasjoner i matematikk for Norge og de fire referanselandene. To stjerner (**) indikerer at korrelasjonen er signifikant på 0,01-nivå.

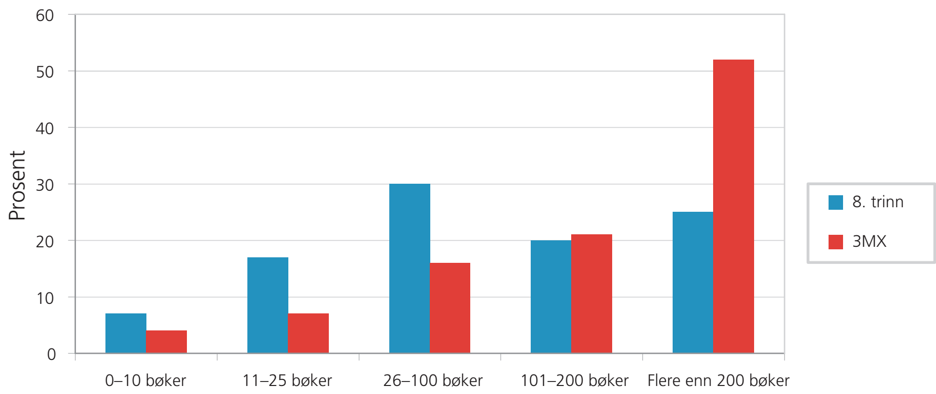
	Norge	Italia	Nederland	Slovenia	Sverige
Korrelasjon	0,22**	0,26**	0,07**	0,08**	0,27**

Av tabellen ser vi at korrelasjonen mellom antall bøker i hjemmene og elevenes matematikkprestasjoner er positiv. Den er omtrent like sterk i Norge, Italia og Sverige, og den er betydelig svakere i Nederland og Slovenia. En nærmere undersøkelse viser at dette også gjelder hvis vi ser på samtlige deltakerland; korrelasjonskoeffisientene ligger mellom 0,15 og 0,27 for alle land med unntak av Nederland og Slovenia. Internasjonalt er det altså en gjennomgående positiv sammenheng mellom antall bøker i elevenes hjem og deres gjennomsnittlige matematikkprestasjoner, men denne sammenhengen er svært svak i Nederland og Slovenia.

Pearsons korrelasjonskoeffisient forutsetter egentlig at det er en lineær eller tilnærmet lineær sammenheng mellom de to variablene som sammenliknes. Dersom sammenhengen avviker mye fra det lineære, kan sammenhengen være sterk, men korrelasjonskoeffisienten får likevel en verdi nær 0. Vi har undersøkt om de norske verdiene i tabell 7.2 og tilsvarende tabeller i det følgende kan være små på grunn av manglende linearitet. Dette ser imidlertid ikke ut til å være tilfelle.

I TIMSS 2003 (Grønmo et al., 2004), som var en tilsvarende studie av elever på barne- og ungdomstrinnet, ble det påvist en noe sterkere sammenheng mellom matematikkprestasjoner og antall bøker hjemme i de fleste av referanselandene. Denne tendensen var sterkere i 8. klasse enn i 4. klasse. Det er da viktig å huske at mens TIMSS undersøker hele årskullet, undersøker TIMSS Advanced en spesiell, relativt liten delgruppe – nemlig de elevene som har valgt å ta full fordypning i matematikk eller fysikk i den videregående skolen. Det kan derfor godt tenkes at det ikke er samme sammenheng mellom bøker i hjemmet og matematikkskår for disse elevene som for hele årskullet. Dersom sosiokulturell status har vært medvirkende i elevenes fagvalg, er det naturlig at denne faktoren spiller mindre rolle innenfor den selekterte gruppa. Det er således ikke overraskende at sammenhengen mellom antall bøker hjemme (som et mål for sosiokulturell status) og matematikkprestasjoner ikke er like sterk i 3MX som i grunnskolen.

For å illustrere dette poenget viser vi i figur 7.2 hvordan norske elever fordeler seg på de ulike kategoriene av antall bøker, henholdsvis for 8. trinn i 2007 og for 3MX i 2008.



Figur 7.2 Antall bøker i hjemmet som oppgitt av elever på 8. trinn i TIMSS 2007 og elever i 3MX i TIMSS Advanced 2008. Figuren viser hvor stor prosentdel av elevene som har valgt de ulike svaralternativene.

Vi ser at det er en tydelig tendens til at hjemmene til 3MX-elevene har flere bøker enn hjemmene til elevene på 8. trinn (i alle fall slik elevene selv oppfatter det). Dette kan være en grunn til at antall bøker i hjemmet har en svakere predikerende styrke for matematikkprestasjon innenfor den spesielle elevgruppa som har valgt 3MX.

7.1.2 Foreldrenes utdanning

Foreldrenes utdanningsnivå er også et mye brukt mål på sosiokulturell status, og elevene som deltok i TIMSS Advanced besvarte følgende spørsmål om mors utdanningsnivå, med et helt likelydende spørsmål om far:

> Hva er den høyeste utdanningen moren din (kvinnelig foresatt) har fullført?
> Svaralternativer:
> Ikke fullført barneskole / Barneskole / Ungdomsskole / Videregående skole / Kort utdanning ved høyskole (1–2 år) / Universitet eller høyskole minst 3 år / Universitet eller høyskole minst 6 år / Vet ikke

Over halvparten av de norske elevene oppgir at foreldrene har høyere utdanning, mens kun 18 elever (1 % av elevgruppa) oppgir at enten mor eller far ikke har fullført grunnskolen. Videre er det til sammen 259 norske elever (13 % av elevgruppa) som har svart «Vet ikke» på spørsmål om mors eller fars høyeste utdanning. Elever som har svart «Vet ikke» inngår naturlig nok ikke i analysene presentert i tabell 7.3, som viser korrelasjonene mellom matematikkskår og foreldreutdanning.

Tabell 7.3 Korrelasjon mellom elevenes matematikkskår og foreldrenes utdanningsnivå for Norge og de fire referanselandene. To stjerner (**) indikerer at korrelasjonen er signifikant på 0,01-nivå, én stjerne (*) at den er signifikant på 0,05-nivå.

	Norge		Italia		Nederland		Slovenia		Sverige	
	mor	far	mor	far	mor	far	mor	far	mor	far
Korrelasjon	0,12**	0,13**	0,24**	0,20**	0,05	0,06*	0,09**	0,07**	0,12**	0,10**

Som tabell 7.3 viser, er det en svak, positiv sammenheng mellom de norske elevenes matematikkprestasjoner og foreldrenes utdanningsnivå. Sammenhengen er imidlertid klart svakere enn korrelasjonen mellom antall bøker i hjemmet og elevenes matematikkprestasjoner. Italia har en sterkere korrelasjon mellom foreldrenes utdanningsnivå og elevenes resultater enn Norge og Sverige. Dette er i tråd med PISA-resultatene, som viser at de nordiske landene har mindre forskjeller i elevprestasjoner knyttet til sosiokulturell bakgrunn enn de fleste andre land (Kjærnsli et al., 2007).

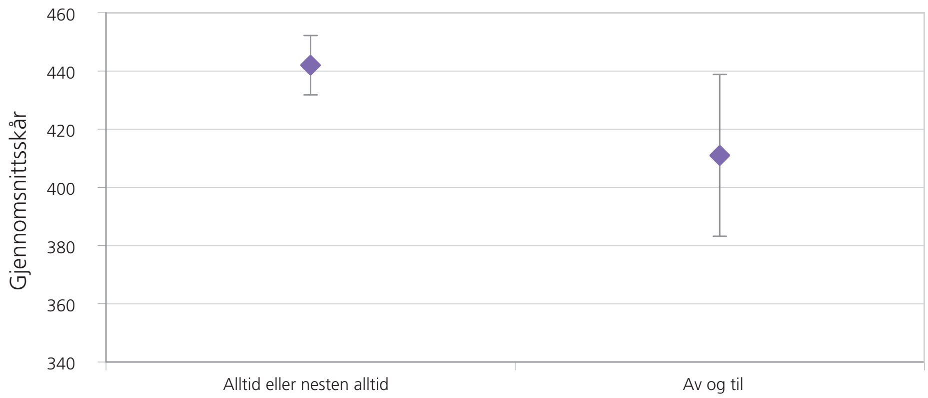
At det er mindre forskjeller i elevenes resultater etter sosiokulturell bakgrunn i TIMSS Advanced i Nederland enn i Sverige og Norge, kan antakelig forklareres med at de nederlandske elevene er en mer selektert gruppe. De utgjør bare 3,5 % av årskullet i Nederland, mens de i Norge og Sverige utgjør henholdsvis 11 % og 13 %. Det spesielle er at Slovenia har så små sosiokulturelle forskjeller i sine resultater når vel 40 % av årskullet er undersøkt i TIMSS Advanced.

For Norges del er de sosiokulturelle forskjellene i TIMSS Advanced langt mindre enn de som er målt på 10. trinn i PISA (ibid.). Karakterstatistikker fra grunn- og videregående skole gir samme bilde, det er større forskjeller i prestasjoner knyttet til sosiokulturell bakgrunn i grunnskolen enn i studieforberedende studieretning i videregående skole. I karakterer i matematikk

(1MX) på allmennfaglig studieretning kunne 0,8 karakterpoeng tilskrives sosial bakgrunn, mens denne forskjellen utgjorde hele 1,6 karakterpoeng i grunnskolen (Hægeland, Kirkebøen & Raaum, 2006).

7.1.3 Språk og prestasjoner

Elevene som deltok i TIMSS Advanced ble bedt om å oppgi hvor ofte de snakker testspråket (for våre elever var det norsk) hjemme. Svaralternativene var «alltid», «nesten alltid», «av og til» og «aldri». I Norge oppgaa 94 % av elevene at de alltid eller nesten alltid snakker norsk hjemme. Figur 7.3 viser at disse elevene presterer noe bedre på matematikktesten enn elevene som snakker norsk hjemme bare av og til. Gjennomsnittsskåren til elevene som oppgir å snakke norsk hjemme av og til, er beheftet med en relativt stor usikkerhet, noe som skyldes at få elever faller i denne kategorien. (Gruppa som svarte at de aldri snakker norsk hjemme, var så liten at vi ikke har grunnlag for å rapportere prestasjon for disse elevene.)



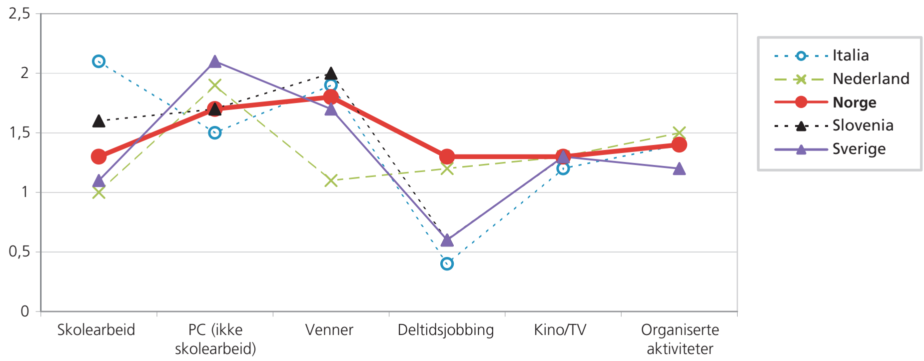
Figur 7.3 Sammenheng mellom hvor ofte elevene snakker norsk hjemme og matematikkprestasjonene deres. 95 % konfidensintervaller for gjennomsnittsverdiene er også vist.

Når det gjelder referanselandene finner vi en liknende tendens i Nederland og Sverige, mens det i Italia og Slovenia var for få elever som ikke snakket testspråket hjemme til at en sammenlikning var mulig (Mullis et al., 2009). Hvis vi går tilbake til 1995, da forgjengeren til TIMSS Advanced ble gjennomført, ser vi at liknende forskjeller også viste seg da; språklige minoritetselever skåret signifikant lavere enn majoritetselevene (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999). I TIMSS Advanced ble elevene også bedt om å svare på om de og/eller foreldrene var født i landet, og en analyse av sammenhengen mellom elevenes matematikkprestasjoner og deres svar på dette spørsmålet gir samme bilde som sammenhengen mellom språk og prestasjoner: elever som er født i Norge, med norskfødte foreldre, skårer klart høyere på matematikktesten enn elever som enten selv er født utenfor landet eller har foreldre som er det.

7.2 Elevenes fritidsaktiviteter og disponering av tid

Matematikkelevene bruker tid på mange ulike gjøremål før og etter skoletid. I løpet av en vanlig skoledag skal de blant annet finne tid til lekser, venner, ulike sportsaktiviteter og kanskje en betalt jobb. I det følgende ser vi på hvor mye tid elever i Norge og referanselandene oppgir å bruke på ulike aktiviteter, og om dette har en sammenheng med deres matematikkprestasjoner.

Figur 7.4 gir en oversikt over hvor lang tid elevene i Norge og referanselandene i gjennomsnitt oppgir å bruke på ulike aktiviteter på en vanlig skoledag. Vi ser at de norske elevene først og fremst skiller seg ut ved å bruke mer tid på betalt deltidsjobbing enn elever i referanselandene (med unntak av Nederland). Videre kan vi se at de italienske elevene skiller seg ut ved å bruke mer tid på skolearbeid enn elever i andre land, mens de nederlandske elevene bruker minst tid på venner.



Figur 7.4 Gjennomsnittlig antall timer elevene bruker på ulike gjøremål på en vanlig skoledag.

Tabell 7.4 viser korrelasjonene mellom hvor mye tid de norske 3MX-elevene bruker på de ulike gjøremålene og deres matematikkprestasjoner. Her er i tillegg tid brukt på matematikklekser tatt med; dataene om dette er hentet fra et annet spørsmål i elevspørreskjemaet.

Tabell 7.4 Korrelasjon mellom tid brukt på ulike gjøremål og matematikkprestasjoner for de norske 3MX-elevene. To stjerner (**) indikerer at korrelasjonen er signifikant på 0,01-nivå, én stjerne (*) at den er signifikant på 0,05-nivå.

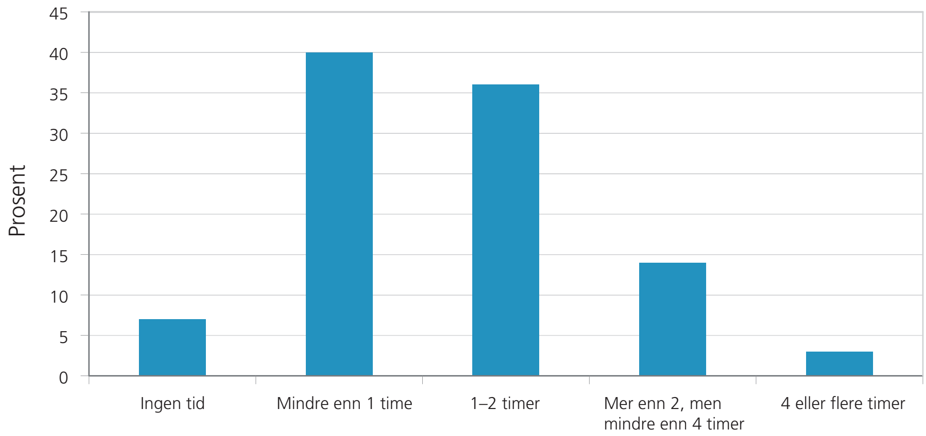
	Skole-arbeid	Matematikk-lekser	PC (ikke skolearbeid)	Venner	Jobb	Kino/TV	Aktiviteter
Korre-lasjon	0,05*	–0,07**	–0,01	–0,21**	–0,22**	–0,13**	–0,10**

Som tabellen viser er sammenhengene mellom tid brukt på ulike aktiviteter og matematikkskår svake, med korrelasjonskoeffisienter som i de fleste tilfellene har tallverdi mindre enn 0,2. Korrelasjonskoeffisientene er også stort sett negative, noe som betyr at det i de fleste tilfellene er slik at mer tid brukt på et gjøremål hører sammen med svakere matematikkprestasjoner.

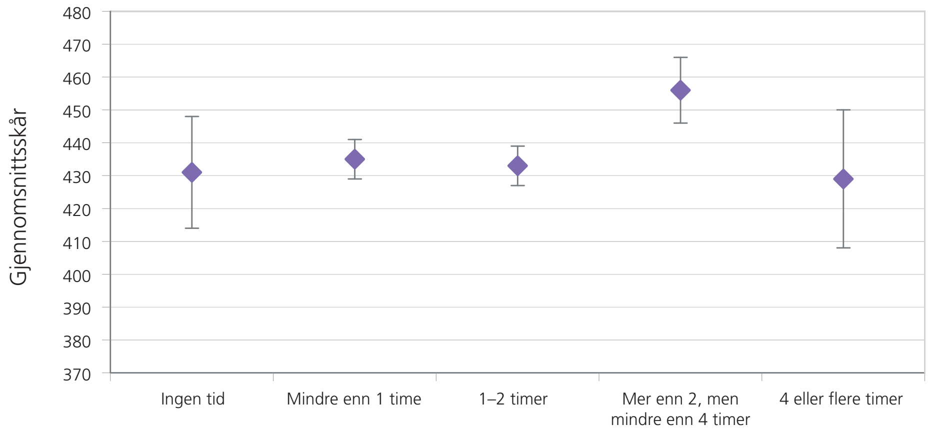
For de norske 3MX-elevene finner vi den sterkeste sammenhengen mellom tid brukt på betalt deltidsjobbing og matematikkprestasjoner. Korrelasjonskoeffisienten er her negativ, noe som altså betyr at mer tid brukt på deltidsjobbing hører sammen med svakere prestasjoner. Sammenhengen mellom tid brukt på venner og matematikkprestasjoner er omtrent like sterk, og også denne er negativ. Nærmere undersøkelser viser at disse sammenhengene også er sterke i de fleste av referanselandene, men det er bare i Norge at tid brukt på deltidsjobbing har større effekt på matematikkprestasjonene enn tid brukt på venner har.

Det kan ved første øyekast virke overraskende at det ikke er noen klar sammenheng mellom tid brukt på skolearbeid og prestasjoner. En nærmere undersøkelse viser at dette også gjelder for de fleste referanselandene, det er bare i Italia vi finner en klar sammenheng mellom hvor mye tid enkeltelever bruker på skolearbeid og deres matematikkprestasjoner. Siden det å arbeide med lekser i alle fag ikke nødvendigvis henger sammen med matematikkprestasjoner, viser tabellen også korrelasjonen mellom hvor mange minutter elevene oppgir at de bruker på matematikklekser i uken (hentet fra en annen del av elevspørreskjemaet) og deres matematikkskår. Heller ikke da viser det seg en tydelig sammenheng mellom elevenes prestasjoner og tid brukt på lekser/skolearbeid. Liknende resultater viste seg også da den tilsvarende studien ble gjennomført i 1998, og da ble dette forklart med at både flittige elever som presterer ganske bra og svake elever som strever med matematikken kan bruke mye tid på hjemmeleksene (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999).

Dette betyr ikke nødvendigvis at lekser ikke har noen effekt på skoleprestasjonene. Det kan for eksempel tenkes at elever i en klasse der det gis mye matematikklekser, som gruppe presterer bedre enn elever i en klasse der lekser ikke vektlegges. For grundigere analyser av dette, se kapittel 9. Her skal vi se på det fra en litt annen vinkel. Figur 7.5 viser hvordan de norske elevene fordelte seg på ulike tidsintervall for skolearbeid, og figur 7.6 viser hvordan elevene i de ulike tidsintervallene skåret i gjennomsnitt.



Figur 7.5 Hvor lang tid de norske 3MX-elevene oppgir at de bruker på skolearbeid på en vanlig skoledag. Figuren viser hvor stor prosentdel av elevene som har valgt de ulike svaralternativene.



Figur 7.6 Gjennomsnittlig skår for elevene i hver av kategoriene i figur 7.5. 95 % konfidensintervaller for gjennomsnittsverdiene er også vist.

Vi ser av figur 7.5 at det store flertallet av norske 3MX-elever bruker mindre enn 2 timer daglig på skolearbeid. Ganske få elever bruker ingen tid eller mer enn 4 timer. Figur 7.6 viser at prestasjonene er relativt stabile over fire av de fem kategoriene, men at det er en tydelig tendens til at de bestpresterende elevene bruker 2–4 timer daglig på skolearbeid. Vi kan regne med at en del av de flinkeste og en del av de svakeste elevene fordeler seg utover hele tidsskalaen for skolearbeid. Dermed blir korrelasjonskoeffisienten såpass lav. Samtidig ser vi altså at elever som bruker relativt mye tid på skolearbeid (men ikke ekstremt mye), gjør det gjennomgående best på testen.

PC og andre digitale verktøy er en del av hverdagen for ungdom, i hvert fall i den vestlige verden. Elevene som deltok i TIMSS Advanced svarte på mange spørsmål knyttet til deres PC-bruk, både på skolen og utenom skoletid. Som vist i figur 7.4 bruker elevene relativt mye tid på PC-en utenom skolearbeidet; i snitt brukte elevene i Norge og referanselandene mellom 1,5 og 2,1 timer på dette hver dag. I tillegg kommer elevenes PC-bruk i forbindelse med skolearbeid. Når det gjelder bruk av PC utenom skoletida, finnes det flere eksempler på forskning som antyder at det er en positiv sammenheng mellom den private PC-bruken og skoleresultater (Attewell & Battle, 1999; Leino, 2003; Nævdal, 2004). Som tabell 7.4 viser, var det imidlertid ingen sammenheng mellom de norske 3MX-elevenes matematikkskår og deres PC-bruk på fritida. Det viser seg også at det ikke er noen klar sammenheng mellom matematikkprestasjoner og PC-bruk på skolen. Her må det igjen presiseres at elevene som tar skolens mest avanserte matematikkurs er en utvalgt gruppe, og at dette kan bidra til at sammenhengen mellom matematikkprestasjoner og bakgrunnsvariabler som PC-bruk ikke er like sterk som påvist for yngre elever. For flere detaljer rundt elevenes bruk av PC hjemme og på skolen viser vi til den internasjonale rapporten (Mullis et al., 2009).

7.3 Avsluttende kommentarer

Til oppsummering kan vi si at norske elever som presterer bra på matematikktesten i TIMSS Advanced kjennetegnes ved at de er norskspråklige (tilhører majoritetsgruppa), har mange bøker hjemme, og ikke bruker mye tid på venner og betalt jobb utenom skolen. Det er imidlertid viktig å få med at elevenes hjemmebakgrunn synes å ha en noe mindre effekt på prestasjonene til denne elevgruppa enn vi er vant med fra tidligere studier. Dette kan, som tidligere nevnt, skyldes at elever som har valgt realfaglig fordypning i den videregående skolen allerede er en spesiell gruppe.

I dette kapittelet har vi gjennomført såkalte *ettnivåanalyser*, det vil si analyser der vi korrelerer elevenes svar på ulike spørsmål med deres prestasjoner, uten å ta hensyn til at elevene tilhører klasser. Et alternativ til dette er *flernivåanalyser*, som tar hensyn til at våre data er hierarkisk strukturert: vi har et utvalg elever, som tilhører ulike klasser, som igjen tilhører ulike skoler. En viktig grunn til å gjøre slike analyser er at samme faktor (for eksempel tid brukt på lekser) kan peke i ulik retning på ulike nivåer, og hvis en faktor for eksempel korrelerer negativt med prestasjoner på elevnivå og positivt på klassenivå, risikerer man at disse effektene opphever hverandre når man gjennomfører ettnivåanalyser. Dette betyr ikke at ettnivåanalysene er feil, men at vi kan få et rikere bilde av situasjonen ved å gjøre andre typer analyser i tillegg. I kapittel 9 presenteres resultater fra *tonivåanalyser* av sammenhengen mellom elevprestasjoner og ulike faktorer (som organisering og metoder i undervisningen og tid brukt på lekser) på både elevnivå og klassenivå.

8 Matematikkundervisning i Norge og i andre land

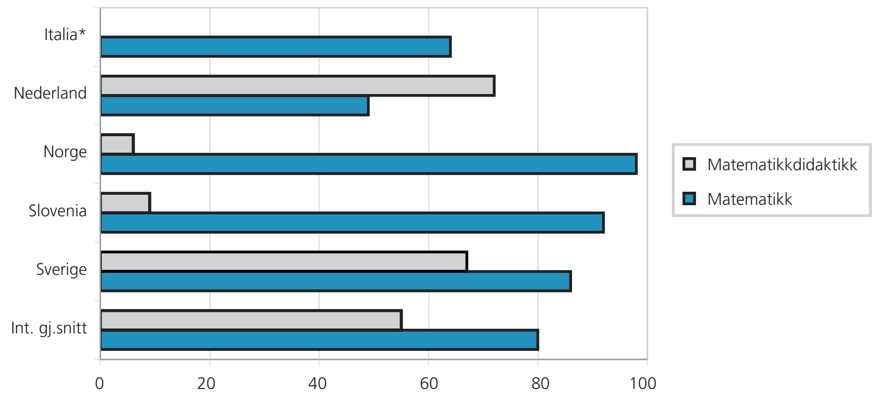
Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo

Både elevene og lærerne i TIMSS Advanced fikk en rekke spørsmål om undervisningen i matematikk. I dette kapittelet blir svarene på mange av disse spørsmålene presentert. Svarene fra elevene og lærerne brukes til å belyse viktige sider av undervisningen i matematikk (3MX i Norge). Det blir også referert til resultater fra TIMSS-studiene fra grunnskolen slik at man kan danne seg et bredt bilde av hva som kjennetegner norsk matematikkundervisning i et nasjonalt og internasjonalt perspektiv. I større grad enn i andre kapitler har vi valgt å gjengi figurer som viser resultater på 8. trinn i grunnskolen og som ble publisert i rapporten fra TIMSS 2007 (Grønmo & Onstad, 2009). Det er gjort for å dokumentere de mange likhetstrekkene det er mellom matematikkundervisning i grunnskolen og i videregående skole i Norge. Dette drøftes også videre i kapittel 11, som oppsummerer resultatene i rapporten og setter dem i et bredt matematikkdidaktisk forskningsperspektiv.

Med mindre vi eksplisitt drøfter matematikkundervisningen i grunnskolen eller i andre land, refererer «matematikk» og «matematikkundervisning» i dette kapittelet til matematikkurset 3MX i Norge.

8.1 Matematikklærernes kvalifikasjoner

Alle lærerne som hadde elever som deltok i TIMSS Advanced, ble bedt om å besvare et spørreskjema om undervisingen i henholdsvis matematikk og fysikk (se kapittel 12 for mer om utvalg av lærere). Der ble de blant annet spurt om sin utdanningsbakgrunn. Dersom matematikklærerne hadde cand.mag. eller høyere grad, ble de blant annet bedt om å oppgi om de hadde minst 20 vekttall (60 studiepoeng) i matematikk eller matematikkdidaktikk. I fortsettelsen er dette kalt *fordypning* i matematikk. Figur 8.1 viser hvor stor prosentandel av matematikklærerne i Norge og de valgte referanselandene som har fordypning i matematikk og/eller matematikkdidaktikk.

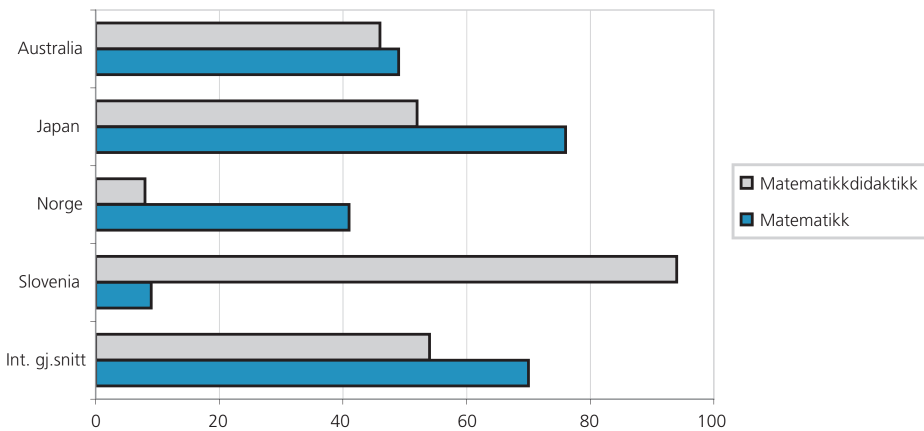


Figur 8.1 Prosentandelen av matematikklærerne i TIMSS Advanced som oppgir at de har fordypning i matematikk og/eller matematikkdidaktikk.
**De italienske lærerne ble ikke spurt om de hadde fordypning i matematikkdidaktikk.*

Som det framgår av figur 8.1 er det en del variasjon mellom landene når det gjelder den faglige bakgrunnen til lærerne som underviser i de avanserte matematikkursene i videregående skole. I Norge oppgir tilnærmet alle lærerne at de har fordypning i matematikk. Det er en høyere prosentandel enn i alle referanselandene og også høyere enn det internasjonale gjennomsnittet. På den annen side er det bare en liten andel av de norske lærerne som oppgir at de har fordypning i matematikkdidaktikk. I og med at matematikkdidaktikk er et relativt nytt fagområde i Norge, er ikke dette overraskende. Man må også ta i betraktning at utdanning av matematikklærere til videregående skole i Norge i overveiende grad har vært organisert slik at man tar faglig fordypning først og deretter ett års påbygning med matematikkdidaktikk, pedagogikk og praksis. I enkelte andre land er utdanningen mer integrert mellom matematikk og matematikkdidaktikk, og hva som defineres som henholdsvis matematikk og matematikkdidaktikk vil derfor variere en del mellom landene.

Vi kan merke oss at for elever med fordypning i matematikk i videregående skole framstår Norge som et land der lærerne har høy fagkompetanse – vel så høy som i mange andre land.

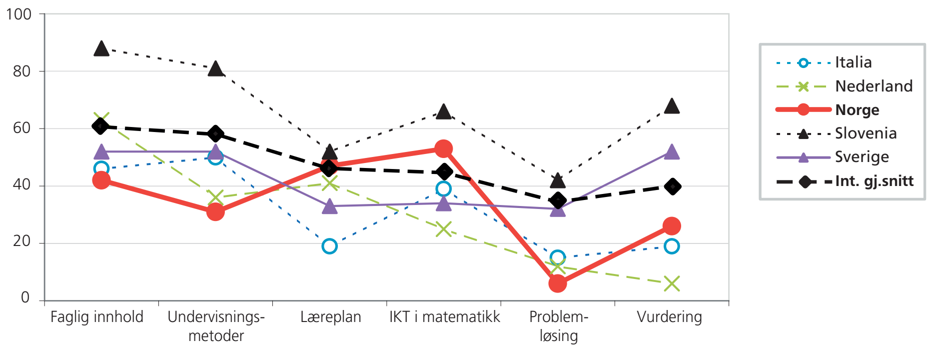
Dette gir et helt annet bilde av utdanningsbakgrunnen til norske matematikklærere i videregående skole enn for lærere i grunnskolen som er undersøkt i TIMSS i 2003 og 2007. Figur 8.2 viser hvor stor prosentandel av matematikklærerne på 8. trinn som hadde fordypning i matematikk i 2007 (Grønmo & Onstad, 2009). Det er til dels andre referanseland som ble brukt i sammenlikningene på 8. trinn, blant annet fordi det er variasjoner i hvilke land som deltar i hvilke studier (for mer om valg av referanseland se kapittel 1). TIMSS i både 2003 og 2007 viste tydelig at blant norske matematikklærere på 8. trinn var det en lavere prosentandel som hadde fordypning i matematikk eller matematikkdidaktikk enn det som var tilfelle i andre land (ibid.; Grønmo et al., 2004). Rett nok har norske lærere på 8. trinn et *generelt høyt utdanningsnivå*, men andelen lærere med *faglig fordypning* i matematikk er lav (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2004; Lie, Kjærnsli & Brekke, 1997a). Spørsmålet om faglig fordypning ble ikke stilt til lærerne på 4. trinn i TIMSS, men nasjonale data viser at manglende faglig fordypning er et enda større problem på barnetrinnet (Lagerstrøm, 2007).



Figur 8.2 Prosentandelen av matematikklærerne på 8. trinn i TIMSS 2007 som oppga at de hadde fordypning i matematikk og/eller matematikkdidaktikk.

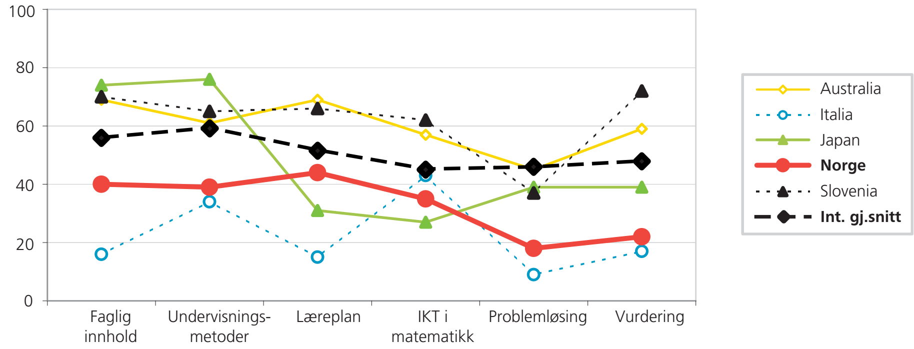
Bildet av hvilken faglig fordypning norske matematikklærere har, framstår derfor som svært forskjellig i norsk grunnskole og videregående skole. St.meld. nr. 31 (2007–2008) påpekte at det var en stor utfordring for Norge å utdanne mange nok kvalifiserte matematikklærere til alle nivåer. Matematikk er et fag hvor lærerens kompetanse synes å ha særlig stor betydning for elevenes prestasjoner (Falch & Naper, 2008).

Lærerne i 3MX ble også spurt om de hadde deltatt i faglig relevant etterutdanning i løpet av de siste to årene. Figur 8.3 viser prosentandelen av lærerne som oppgir at de har tatt etterutdanning i ulike temaer. De norske lærerne deltar mindre i faglig relevant etterutdanning enn lærere i andre land. Norge ligger under det internasjonale gjennomsnittet på fire av områdene og på det internasjonale gjennomsnittet på temaet læreplanen i matematikk. Det eneste området hvor norske lærere ligger over det internasjonale gjennomsnittet er i bruk av IKT i matematikkundervisningen. Det kan være en indikator på hva myndigheter og skoleeiere satser ressurser på. IKT betraktes som et viktig emne å etterutdanne lærerne i, mens en kontinuerlig matematikkdidaktisk oppdatering av lærerne i andre faglige temaer ikke ser ut til å få tilstrekkelig oppmerksomhet og ressurser, til tross for at mange vil argumentere for at dette er nødvendig for en god undervisning (Sowder, 2007).



Figur 8.3 Prosentandelen av matematikklærerne i TIMSS Advanced som oppgir at de har deltatt i faglig relevant etterutdanning i ulike temaer de siste to årene.

Figur 8.4 viser matematikklærernes svar på det tilsvarende spørsmålet på 8. trinn i 2007-studien. Norske lærere ligger gjennomgående lavt i forhold til det internasjonale gjennomsnittet når det gjelder etter- og videreutdanning også på dette trinnet, til tross for en viss økning nasjonalt fra TIMSS 2003. De to områdene som ligger nærmest det internasjonale gjennomsnittet på 8. trinn er også her læreplan og bruk av IKT. På 4. trinn i TIMSS 2007 lå norske matematikklærere lavt i forhold til det internasjonale gjennomsnittet på alle områdene.



Figur 8.4 Prosentandelen av matematikklærerne på 8. trinn i TIMSS 2007 som oppga at de hadde deltatt i faglig relevant etter- eller videreutdanning i ulike temaer de siste to årene.

Det er slående likhetstrekk mellom læreres deltakelse i etter- og videreutdanning i Norge på tvers av nivåer i skolen. Det kan se ut til at det er en generell nedvurdering av læreres behov for en kontinuerlig faglig oppdatering i Norge i forhold til i mange andre land. Unntaket synes å være kurs om bruk av IKT i matematikk, spesielt i videregående skole. Når det gjelder lærernes faglige kompetanse, er lærernes fordypning i matematikk svak i hele grunnskolen, men god i videregående skole, i alle fall blant lærerne i det mest avanserte kurset 3MX. Den manglende matematikkompetansen i grunnskolen ser i liten grad ut til å bygges opp, mens den høye kompetansen i videregående skole i liten grad vedlikeholdes.

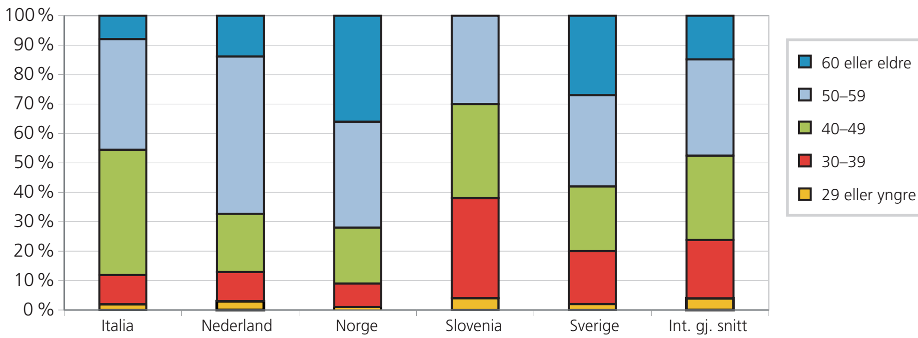
8.2 Alder og erfaring hos matematikklærerne

Det er bra at Norge har lærere med god fagutdanning i 3MX. Ser man også på antall år lærerne har undervist, framstår norske matematikklærere i tillegg som svært erfarne, se tabell 8.1.

Tabell 8.1 Gjennomsnittlig antall år matematikklærerne i TIMSS Advanced har undervist.

Land	Totalt antall undervisningsår	Undervisningsår i 3MX (eller tilsvarende kurs)
Italia	22	12
Nederland	27	17
Norge	27	26
Slovenia	18	14
Sverige	22	9

Figur 8.5 viser aldersfordelingen til 3MX-lærerne i Norge og de tilsvarende lærerne i referanselandene. Norge framstår som landet med de eldste lærerne. Så mange som 73 % av de norske lærerne som underviser i 3MX har fylt 50 år, og de fordeler seg jevnt på de to gruppene 50–59 år og over 60 år! Sverige og Nederland har litt yngre lærere enn Norge, mens Italia og særlig Slovenia har mye yngre matematikklærere på sine avanserte matematikkurs i videregående skole. For Norges del er det et særdeles stort behov for å rekruttere godt utdannede matematikklærere til erstatning for alle de som kommer til å slutte i de nærmeste årene.



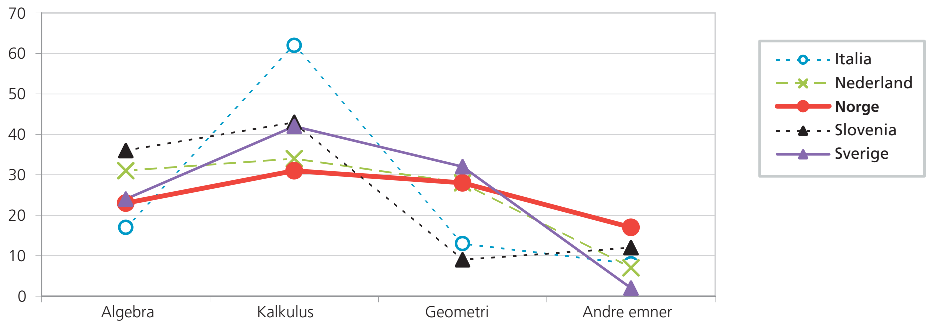
Figur 8.5 Matematikklærerne i TIMSS Advanced fordelt på aldersgrupper.

Lærerne som settes til å undervise 3MX-elevene er trolig blant de høyest utdannede og mest erfarne i Norge. Det er påpekt, blant annet i stortingsmeldinger, at Norge har et problem når det gjelder rekruttering av lærere (St.meld. nr. 11, 2008–2009). Men i motsetning til en del andre yrker hvor Norge importerer høyt utdannet arbeidskraft, kan man vanskelig tenke seg en slik løsning når det gjelder lærere i realfag. At ingeniører i oljeindustrien ikke snakker norsk, er neppe noe stort problem. Å ha realfaglærere i skolen som ikke snakker norsk, vil derimot være svært problematisk.

8.3 Vektlegging av ulike emneområder i matematikkundervisningen

Rammeverket for TIMSS Advanced organiserer matematikken i tre innholdskategorier: Algebra, Kalkulus og Geometri (Garden et al., 2006). I kapitlene 4, 5 og 6 gis det en kort oversikt over innholdet og eksempler på oppgaver innen hver kategori. Lærerne ble spurt om hvor mye av undervisningstiden (i 3MX i Norge) som ble brukt på hver av kategoriene, og på tid til *andre emner*. De gjennomsnittlige prosentverdiene lærerne gir for tid brukt på henholdsvis Algebra, Kalkulus, Geometri og på andre emner er vist i figur 8.6.

Det framgår av figur 8.6 at Norge har den høyeste prosentandelen med undervisningstid som blir brukt på andre matematikkfaglige emner. Dette er en kategori som kan ha ulikt innhold fra land til land. I Norge må vi regne med at den i hovedsak dekker statistikkdelen i 3MX. Se kapittel 12 om grunnene for at statistikk ikke er innholdskategori i TIMSS Advanced 2008.



Figur 8.6 Gjennomsnittlig prosentandel av undervisningstiden i matematikk i TIMSS Advanced som i følge lærerne blir brukt på hver av de faglige innholdskategoriene og på andre emner.

Figur 8.6 viser at Kalkulus blir sterkt vektlagt i undervisningen i alle landene. Samtidig har de fleste landene svakest elevskår nettopp i Kalkulus; se figur 3.4. En mulig årsak er at Kalkulus-oppgavene i testen er vanskeligere enn oppgavene på de andre fagområdene og/eller at de utvalgte oppgavene burde ha vært mer i tråd med landenes læreplaner. Dette harmonerer ikke helt med de omfattende utviklings- og utvelgingsprosedyrene og den grundige piloteringen av oppgavene som ble gjort før utvelgelsen av oppgaver til testen (se kapittel 12).

I matematikk har man grunnleggende ferdigheter på alle nivåer. I videregående skole er for eksempel derivasjon, grenseverdier og manipulering av algebraiske uttrykk viktige ferdigheter elevene trenger å trene inn. Grenseverdier og derivasjon står sentralt i det som testes innen området Kalkulus i TIMSS Advanced, se kapittel 5 med oppgaver fra dette området. Det kan tenkes at det er flere oppgaver i Kalkulus enn i de andre områdene hvor man har behov for grunnleggende ferdigheter. Derivasjon brukes mye, og mange av oppgavene i Kalkulus krever at elevene behersker denne ferdigheten, se for eksempel oppgavene 4 og 5 i kapittel 5. At elevene ikke har trenet inn derivasjon i tilstrekkelig grad kan være én årsak til svake resultater i Kalkulus, i alle fall når det gjelder de norske elevene.

I den første matematikkplanen som kom under Reform 94 for det felles allmenne matematikkfaget kunne vi lese følgende:

> Forståelse og ferdighet er nøye bundet sammen; uten forståelsen blir ferdighetene meningsløse manipulasjoner, og uten ferdighetene mister forståelsen all praktisk verdi – en matematiker som må tenke seg om før han legger sammen to brøker, er like hjelpeløs som en pianist som må tenke seg om for å slå en akkord. Regnetrening er matematikkens skalaøvelser. Regning med parenteser, brøkuttrykk, potenser og rottegn er verken nyttig eller interessant i seg selv, men det er en nødvendig forutsetning for nesten alle nyttige og interessante anvendelser av matematikken. For ikke å stjele tid og tanke fra vanskeligere og viktigere ting, må regneteknikkene sitte i fingertuppene og kunne fremkalles og utføres uten spesiell omtanke. (KUF, 1994, s. 182)

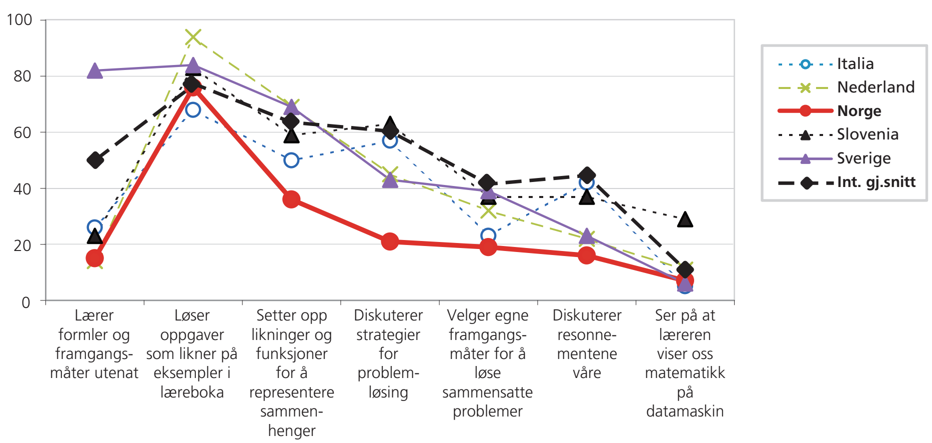
Det er et par særtrekk ved det norske skolesystemet under Reform 94 som synes å stå i en viss motsetning til dette. For det første fikk elevene etter hvert anledning til å bruke «alle» hjelpemidler til eksamen, og derfor stort sett også til prøver. Det kunne dreie seg om formelsamling, egne notater og avansert kalkulator. Mange lærere har fortalt hvor vanskelig det har vært å motivere elever til å lære definisjoner, formler og teknikker utenat når de kunne ha med seg alt «i veska» til eksamen. Nå er ikke kunnskap i veska like anvendelig og effektiv som det man har trenet inn som ferdighet. Innlæring av grunnleggende ferdigheter er også avgjørende for utviklingen av matematisk kompetanse generelt (Björkquist, 2001; Grønmo, 2005; Schoenfeld, 1992; Grønmo & Onstad, 2009).

For det andre ble det etablert regler for eksamen som tilsa at pensumstoff i ett kurs ikke kunne eksamineres i etterfølgende kurs. Det betydde for eksempel at stoff som sto i læreplanen i 2MX ikke kunne gjøres til gjenstand for eksaminering i 3MX. I et hierarkisk oppbygd fag som matematikk byr dette på klare problemer, og vil ofte motvirke bestrebelser på å vedlikeholde viktige ferdigheter.

Vi peker derfor på at en mulig årsak til at norske elever presterer så vidt svakt i TIMSS Advanced, og spesielt svakt i Kalkulus, er at de ikke har et solid faglig fundament av grunnleggende kunnskaper og ferdigheter, og at det er relativt mange grunnleggende ferdigheter som trengs å trenes inn i Kalkulus. På den bakgrunn er det fristende å parafrasere sitatet fra læreplanen i Reform 94 ovenfor: En matematiker som må tenke seg om før hun deriverer en funksjon, er like hjelpeløs som en pianist som må tenke seg om for å slå en akkord.

8.4 Organisering og arbeidsmåter i matematikkundervisningen

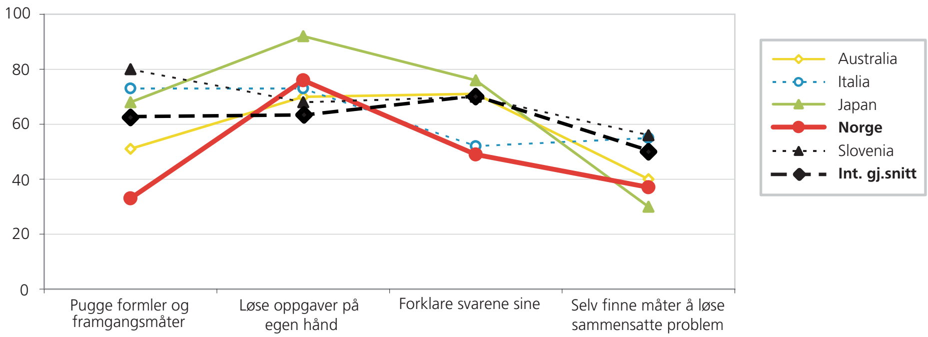
Elevene ble spurt om hvor ofte ulike typer arbeidsmåter ble benyttet i undervisningen. Det ble benyttet en skala med alternativene «Hver eller nesten hver time», «Omtrent halvparten av timene», «Noen timer» og «Aldri». Resultatene er vist i figur 8.7.



Figur 8.7 Elevenes syn på hvor ofte ulike arbeidsmåter benyttes i matematikktimene i TIMSS Advanced. Prosentandelen av elevene som svarer omtrent halvparten av timene eller oftere.

Vi ser at Norge ligger langt under det internasjonale gjennomsnittet for fem av de sju arbeidsmåtene. De to arbeidsmåtene hvor vi ligger aller lavest i forhold til det internasjonale gjennomsnittet, er å «Lære formler og framgangsmåter utenat» og å «Diskutere strategier for problemløsing». At norske elever ligger klart under det internasjonale gjennomsnittet på akkurat disse kategoriene, samsvarer godt med resultatet for TIMSS i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009). Tilsvarende spørsmål til elevene i grunnskolen var hvor ofte de «Pugger formler og framgangsmåter» og hvor ofte de «Forklarer svarene sine». Både på 8. trinn og på 4. trinn var gjennomsnittet for norske elever på hyppigheten av disse arbeidsmåtene klart under det internasjonale gjennomsnittet. De norske dataene fra TIMSS Advanced-studien peker i samme retning for 3MX-elevene. Både det å trene inn framgangsmåter med sikte på å automatisere visse ferdigheter, og det å diskutere og argumentere rundt svar og løsningsmetoder, synes å bli mindre vektlagt i norsk skole enn i andre land, og det ser ut til å gjelde på alle nivåer i skolen, fra barnetrinn til slutten av videregående skole.

Det er også andre land i TIMSS Advanced hvor elevene svarer at det å pugge formler og framgangsmåter ikke gjøres så mye mer enn i Norge, samtidig som de presterer relativt godt. Det gjelder for eksempel Slovenia og Italia. Det er interessant å se hvordan elevene i disse landene svarte på tilsvarende spørsmål i TIMSS på 8. trinn i 2007; se figur 8.8. (Det var til dels andre referanseland som ble brukt i analysene den gangen, for eksempel var Nederland ikke referanseland fordi de ikke deltok på både 4. og 8. trinn i studien. For mer om valg av referanseland, se kapittel 1.)



Figur 8.8 Elevenes syn på hvor ofte ulike arbeidsmåter ble benyttet i matematikktimene på 8. trinn i TIMSS 2007. Prosentandelen av elevene som svarte omtrent halvparten av timene eller oftere.

På 8. trinn svarte elevene i Slovenia og Italia at de pugget formler og framgangsmåter langt hyppigere enn de norske elevene. Samme tendens så man i TIMSS på 4. trinn, særlig uttalt for slovenske elever (Mullis, Martin & Foy, 2008). Det Norge utmerker seg med er at det er et gjennomgående trekk for elever på alle trinn i skolen at de i liten grad lærer sentrale kunnskapselementer utenat. Noen vil hevde at slike arbeidsmetoder ikke er spesielt viktige, eller at de er viktigst på de lavere trinnene i skolen. Har man først lært seg denne metoden, trenger den kanskje ikke å ha like stor plass i undervisningen senere. Metoden kan da være noe elevene selv tar i bruk etter behov, og ikke nødvendigvis noe som vektlegges sterkt i klasserommet under ledelse av læreren.

Norske elever ligger også langt under det internasjonale gjennomsnittet på å «Diskutere strategier for problemløsing» og på å «Diskutere resonnementene våre». Også her er det en slående likhet med resultatene for både 4. og 8. trinn i grunnskolen, hvor norske elever lå klart lavere enn det internasjonale gjennomsnittet på det tilsvarende spørsmålet om hvor ofte man i undervisningen la vekt på at de skulle «Forklare svarene sine» (Grønmo & Onstad, 2009). Dette er arbeidsmåter som spesielt tar sikte på å utvikle gode begreper og problemløsingsstrategier hos elevene (Cobb et al., 1997).

Det kan derfor synes som om to av de viktigste læringsstrategiene som framheves når det gjelder utvikling av matematisk forståelse, nemlig trening av ferdigheter og diskusjon rundt begreper og løsningsmetoder, begge er mindre brukt i norsk skole enn i mange andre land.

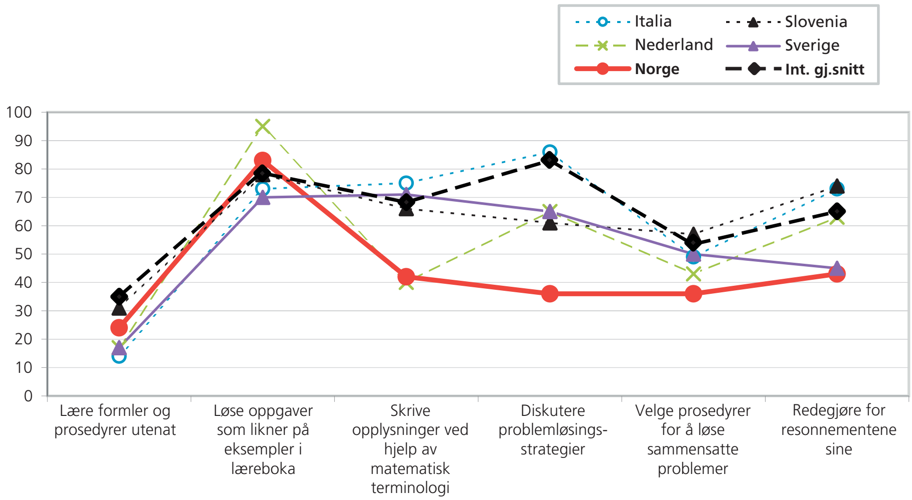
De eneste områdene hvor Norge ikke ligger under det internasjonale gjennomsnittet i videregående skole, er når det gjelder å «Se på at læreren viser matematikk på datamaskin», der alle landene bortsett fra Slovenia ligger lavt, og å «Løse oppgaver som likner på eksempler i læreboka», der alle landene ligger høyt.

Den store vektleggingen av oppgaveløsing i undervisningen i TIMSS Advanced samsvarer også med resultater fra tidligere TIMSS-studier av matematikkundervisning i grunnskolen; se figur 8.8. I rapporter fra TIMSS-studiene i grunnskolen ble dette, sammen med resultater fra andre norske studier, tatt som en indikasjon på overdreven bruk av individuelle arbeidsformer i matematikk i Norge og stor vekt på elevenes «Ansvar for egen læring» (Bergem, 2009; Grønmo & Onstad, 2009). Nå er det et generelt trekk i TIMSS Advanced at denne arbeidsmåten er mye brukt i alle land. Det som skiller Norge fra de andre landene, er at våre elever rapporterer klart lavere på *andre arbeidsmåter*. Dette er så framtredende for Norge at det ble bemerket i den internasjonale rapporten for TIMSS Advanced:

> Interestingly, according to Norwegian students, the only one of these activities that occurred in half or more of their advanced mathematics classes was solving problems similar to those in their textbooks. (Mullis et al., 2009, s. 163)

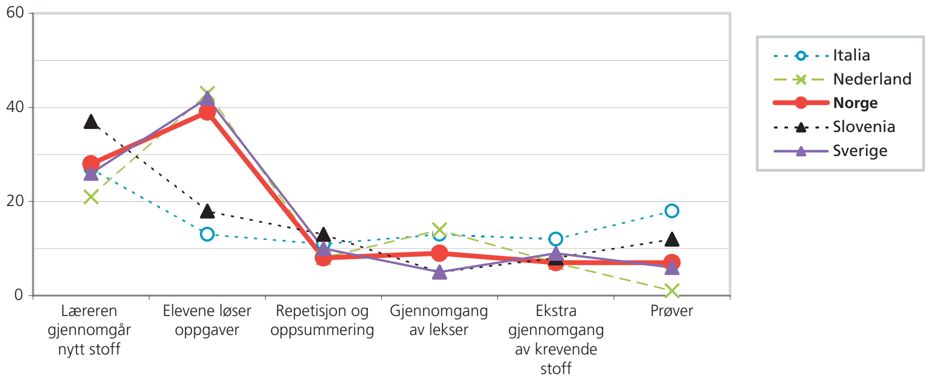
Resultatene fra TIMSS Advanced synes derfor å støtte tidligere konklusjoner fra studier i grunnskolen, nemlig at det er en *mer ensidig vekt* på denne arbeidsformen i Norge enn i andre land, og *mindre vekt på andre arbeidsmåter*. Andre forskere har også påpekt det problematiske i at individualisering har fått så stor plass i norsk skole, med en tilsvarende avvisning av felleskapslæring som forkastelig formidlingspedagogikk (Imsen, 2003b).

Lærernes svar på bruk av arbeidsmåter er presentert i figur 8.9. Lærernes oppfatninger om dette samsvarer i høy grad med hva elevene svarer på samme type spørsmål; se figur 8.7. Dette samsvaret bidrar til å underbygge de konklusjonene som trekkes om ensidig bruk av individuelle arbeidsmåter og nedtoning av diskuterende og argumenterende metoder i norsk matematikkundervisning.



Figur 8.9 Lærernes syn på hvor ofte ulike arbeidsmåter benyttes i matematikktimene. Prosentandelen av lærerne som svarer omtrent halvparten av timene eller oftere.

Figur 8.10 viser lærernes svar på hvor stor prosentandel av tiden de bruker på en del aktiviteter: gjennomgang av nytt stoff, elevene løser oppgaver, repetisjon og oppsummering, gjennomgang av lekser, ekstra gjennomgang av krevende stoff, og prøver.



Figur 8.10 Lærernes gjennomsnittlige svar på hvor stor prosentandel av tiden de bruker til ulike aktiviteter i matematikktimene i løpet av en typisk uke.

Den norske og den svenske undervisningsprofilen har klare likhetstrekk. Begge land ligger nokså høyt på at læreren gjennomgår nytt stoff, og særlig på at elevene løser oppgaver (på egenhånd eller med andre elever), og relativt lavt på de øvrige områdene. Land som Slovenia og Italia ligger også høyt på at læreren gjennomgår nytt stoff, men klart lavere når det gjelder å bruke tid i klassen til at elevene løser oppgaver. Til gjengjeld ligger Italia høyere på gjennomgang av lekser og ekstra gjennomgang av krevende stoff. Når det gjelder bruk av prøver ligger både Italia og Slovenia klart høyere enn Norge og Sverige. Nederland har en profil som likner på Norge og Sverige. De ligger lavest når det gjelder lærerens gjennomgang av nytt stoff og bruker nesten ikke prøver i det hele tatt, mens de ligger høyest sammen med Italia på gjennomgang av lekser.

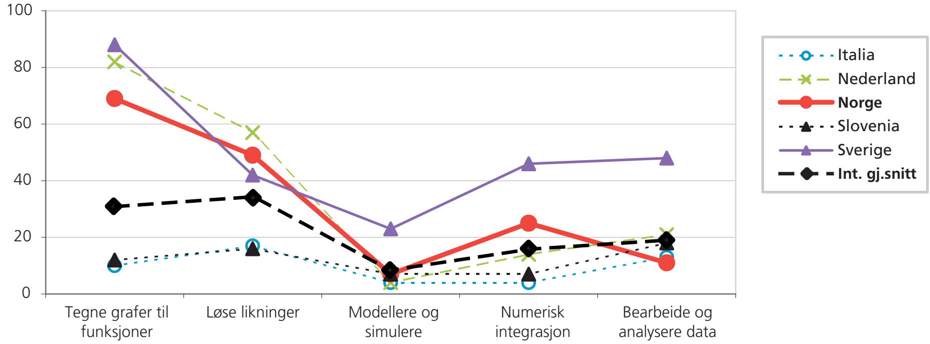
TIMSS-data, både for grunnskolen og for videregående skole, tyder på at vi i Norge har utfordringer knyttet til det å *variere undervisningsmetodene i matematikk*. I Norge brukes en høy prosentandel av tiden enten til gjennomgang av nytt stoff eller til arbeid (ofte individuelt) med oppgaver. Monotone arbeidsformer kan virke demotiverende på mange elever og skape uvilje mot å arbeide med matematikkfaget. Motivasjon er et viktig aspekt ved læring, noe som også understrekes i forordet til Kunnskapsløftet (LK06):

«Motivasjonen og lysta til å lære kan vere avgjerande for om ein lykkast eller ikkje. Derfor må elevane oppmuntrast til aktiv deltaking i sitt og andres læringsarbeid.» (KD, 2006, s. 3)

8.5 Bruk av kalkulator

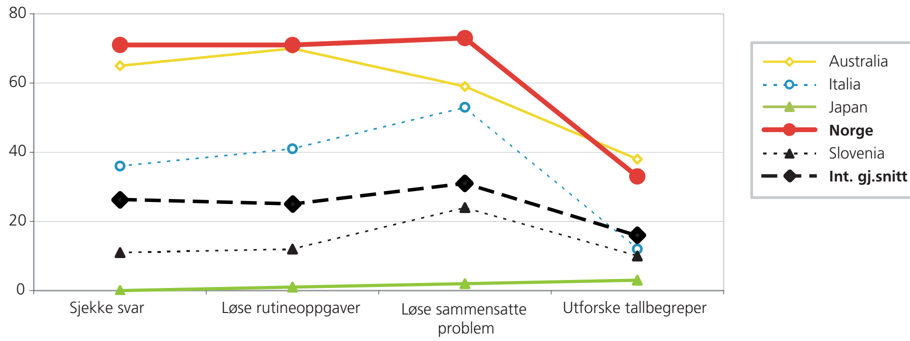
Lærerne ble spurt om hvor ofte elevene bruker kalkulator på ulike måter i matematikktimene. Av svarene i figur 8.11 framgår det at Norge, Sverige og Nederland ligger klart over det internasjonale gjennomsnittet for bruk av kalkulator når det gjelder å tegne grafer og å løse likninger. Sverige ligger klart over det internasjonale gjennomsnittet på samtlige områder. Slovenia og Italia skårer derimot generelt lavt på alle spørsmålene om bruk av kalkulator i matematikktimene.

Det er et tankekors at Slovenia og Italia, de to referanselandene med best resultat tatt i betraktning at de tester henholdsvis 40 % og 20 % av årskullet i TIMSS Advanced, er de to landene som synes å være mest tilbakeholdne med bruk av kalkulator.



Figur 8.11 Lærernes svar på hvor ofte elevene bruker kalkulator til ulike aktiviteter i matematikktimene. Prosentandelen av lærerne som svarer omtrent halvparten av timene eller oftere.

Norge og Sverige utmerker seg som to land som bruker kalkulator mye. Også dette samsvarer langt på vei med resultatet for 8. trinn i grunnskolen; se figur 8.12. Norge lå helt på topp i hyppighet når det gjaldt kalkulatorbruk på dette trinnet, mens høytpresterende land som Japan og Slovenia brukte kalkulator i langt mer beskjeden grad (Grønmo & Onstad, 2009).

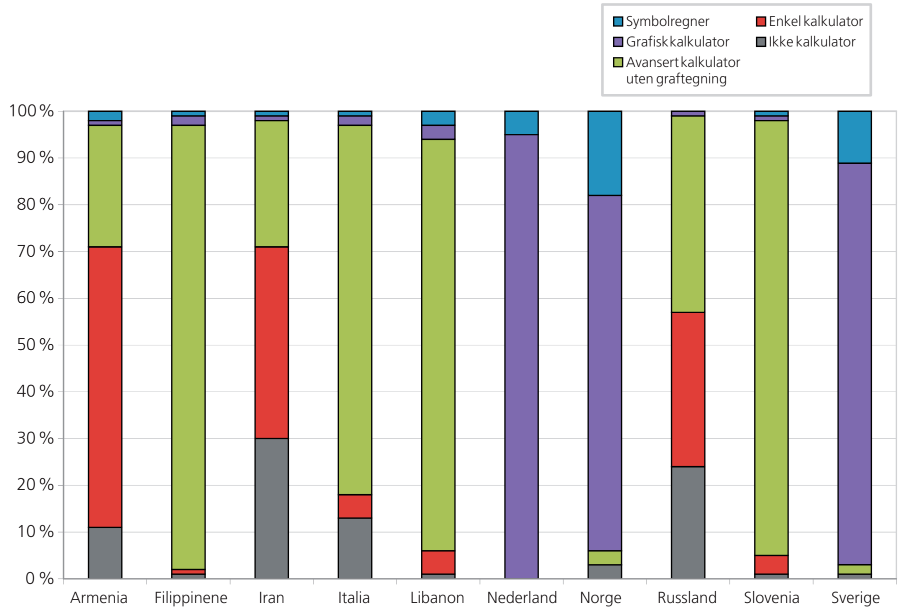


Figur 8.12 Lærernes syn på hvor ofte elevene brukte kalkulator til ulike aktiviteter i matematikktimene på 8. trinn i TIMSS 2007. Prosentandelen av lærerne som svarte omtrent halvparten av timene eller oftere.

Bruk av kalkulator har blitt flittig debattert så vel internasjonalt som nasjonalt både i fagdidaktiske og akademiske miljøer og blant matematikklærere i skolen. Læreplanene for grunnskolen, både L97 og LK06, inneholder formuleringer om bruk av kalkulator i tilknytning til målene for matematikkundervisningen på småskoletrinnet, mellomtrinnet og ungdomstrinnet. I innledningen til læreplanen for 2MX og 3MX i R94 kan vi lese: «Ny teknologi gir nye muligheter til å eksperimentere og utforske, og skolematematikken må utnytte disse mulighetene der det er faglig og pedagogisk hensiktsmessig.» (KUF, 2000, s. 6)

Kalkulatoren har spilt en viktig rolle ved matematikkeksamener i Norge – delvis ved at elevene har hatt lov til å bruke kalkulator til eksamen, delvis ved at mange av oppgavene har vært tilrettelagt for kalkulatorbruk. At det nå er innført todelt eksamen i matematikk – den ene delen av eksamen uten noen hjelpemidler, den andre delen med hjelpemidler – kan tenkes å føre til endringer både i holdninger til kalkulatorbruk og i arbeidsmåter i matematikkundervisningen i skolen. Uansett er det viktig å legge vekt på det som står i sitatet fra R94 ovenfor, nemlig at de teknologiske mulighetene skal utnyttes «der det er faglig og pedagogisk hensiktsmessig».

Figur 8.13 viser hva elevene i alle deltakerlandene i TIMSS Advanced svarer på spørsmål om hvilken type kalkulator de bruker. Lærerne fikk tilsvarende spørsmål, og deres svar stemmer godt overens med elevenes svar.



Figur 8.13 Elevenes svar på hvilken type kalkulator de bruker i matematikktimene.

I Iran og Russland er det store andeler av elevene som ikke bruker kalkulator. I Armenia, Iran og Russland har mange elever bare en enkel kalkulator, det vil si en kalkulator som har de fire grunnleggende regningsartene samt eventuelt prosent og kvadratrot, men ikke trigonometriske funksjoner og logaritmer. I Norge og de valgte referanselandene er derimot kalkulator i allmenn bruk. Det er likevel store forskjeller også mellom disse landene når det gjelder *kalkulatortype*. Nesten alle elevene i Norge, Sverige og Nederland bruker grafisk kalkulator som kan tegne funksjonsgrafer. Flest symbolregnere finner vi i Norge med 18 % og i Sverige med 11 %. I Slovenia og Italia har nesten ingen elever grafisk kalkulator.

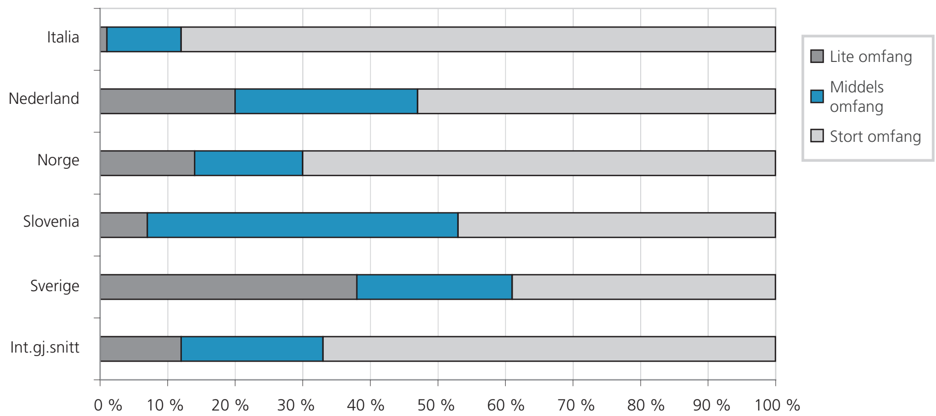
Man kan vanskelig unngå å spørre om land som Norge og Sverige i for stor grad tror at teknologibruk fører til bedre faglige resultater i et fag som matematikk. Det synes også betimelig å spørre om bruk av kalkulator i betydelig grad har erstattet innlæring av grunnleggende ferdigheter i disse landene. Mangel på slike ferdigheter kan, som vi har kommentert tidligere, ha en negativ innvirkning på elevenes utvikling av begreper og løsingsstrategier. Dette drøftes videre i kapittel 11.

Vi minner også om presentasjonen og drøftingen av oppgaver i kapitlene 4, 5 og 6. De norske elevene brukte kalkulator i betydelig grad på matematikktesten i TIMSS Advanced. Samtidig finner vi en rekke eksempler på oppgaver der kalkulatoren kunne ha vært til stor nytte, men hvor de norske elevene likevel skårer lavt. Det ser ut til at norske elever behersker grunnleggende, arbeidsbesparende teknikker med kalkulator, men at de i langt mindre grad er flinke til å bruke kalkulatoren på kreative måter. Det er primært i lett gjenkjennelige oppgavetyper at de norske elevene tar kalkulatoren i bruk. Kalkulatorens potensial synes med andre ord ikke å bli utnyttet på en innsiktsfull måte med sikte på å gjøre elevene til bedre problemløsere.

8.6 Lekser i matematikk

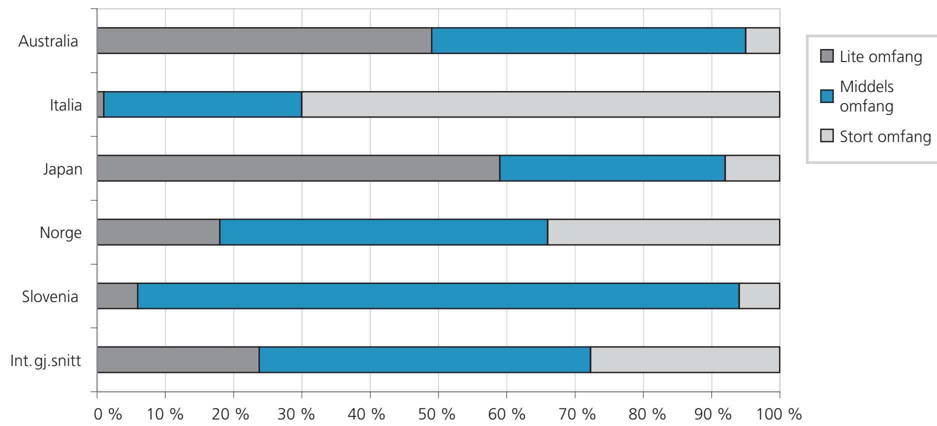
I TIMSS er det undersøkt hvor stor vekt det legges på lekser i de ulike landene, og hvordan leksene følges opp av lærerne. Lekser kan ha ulikt innhold fra land til land. Skillet mellom det som gjøres på skolen og det som skal gjøres hjemme kan være utydelig. Leksebegrepet er derfor mindre entydig enn tidligere. Resultatene som presenteres her, bør til en viss grad vurderes i lys av disse reservasjonene. Når det er sagt, viser klasseromsstudier at uttrykket «å gjøre lekser» fremdeles benyttes mye av lærere og elever (Bergem, 2009), men det kommer muligens av mangel på mer treffende betegnelser.

Både for TIMSS i grunnskolen og TIMSS Advanced har man beregnet en samlevariabel basert på to spørsmål i lærerspørreskjemaet, et om hvor ofte lærerne vanligvis gir lekser, og et om hvor tidkrevende lekser som blir gitt. Et *stort omfang* av lekser betyr at det blir gitt mer enn 30 minutter lekse i halvparten av timene eller oftere. Et *lite omfang* betyr at lekser ikke blir gitt, eller at det gis mindre enn 30 minutter lekse i halvparten av timene eller sjeldnere. Et *middels omfang* indikerer andre kombinasjoner av svar (kortvarige lekser ofte eller langvarige lekser sjelden). Figur 8.14 viser hvordan dette fordeler seg i Norge og i referanselandene, sammen med det internasjonale gjennomsnittet.



Figur 8.14 Omfang av lekser i matematikk i TIMSS Advanced. Prosentandeler av lærerne som svarer ulike grader av omfang. Se forklaring av omfangskategoriene i teksten ovenfor.

Vi ser at Italia gir matematikklekser i klart større grad enn Norge, og Sverige i klart mindre grad enn Norge. Resultatet i Norge viser stort samsvar med det internasjonale gjennomsnittet på denne samlevariabelen for lekser. Det samme var tilfelle på både 4. trinn og 8. trinn i TIMSS 2007; se figur 8.15 som viser dette for 8. trinn. Samsvaret mellom svar fra de norske lærerne og det internasjonale gjennomsnittet var det samme på 4. trinn, men her ble det generelt gitt noe mindre lekser i de fleste landene.



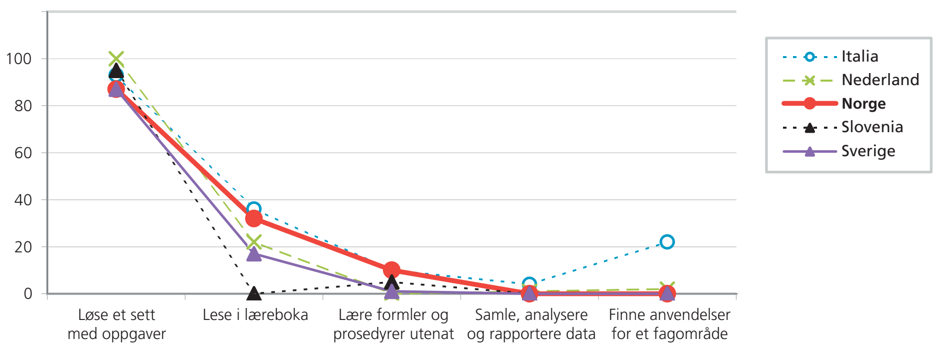
Figur 8.15 Omfang av lekser i matematikk på 8. trinn i TIMSS 2007. Prosentandeler av lærerne som svarte ulike grader av omfang. Se forklaring av omfangskategoriene i teksten foran figur 8.14.

Selv om Norge ga lekser til elevene i grunnskolen på lik linje med gjennomsnittet for alle deltakerlandene, var det et annet viktig punkt hvor Norge skilte seg klart ut. Det var i hvilken grad leksene ble fulgt opp på ulike måter. Det gjaldt om læreren rettet og ga tilbakemelding, om elevene selv rettet leksene i timen, om leksene ble brukt som utgangspunkt for diskusjon i klassene og om leksene telte med ved karaktersetting. På alle disse punktene rapporterte norske lærere i 2007 langt under det internasjonale gjennomsnittet, og i nesten alle tilfeller også lavere enn de fire referanselandene Australia, Italia, Japan og Slovenia (Grønmo & Onstad, 2009).

På ett punkt, sjekking av om leksene var gjort, var det en markant økning i prosentandelen av norske 8. trinns lærere som oppga at de hadde gjort dette fra 2003 til 2007 (fra 21 % til 44 %). Dette ble i TIMSS 2007-rapporten tolket som et resultat av at flere forskningsrapporter hadde pekt på viktigheten av systematisk oppfølging av elevenes leksearbeid (Klette, 2004; Grønmo et al., 2004; Kjærnsli et al., 2004, 2007), og at det i perioden hadde blitt rettet mer oppmerksomhet mot lekser i skolen. TIMSS-rapporten for grunnskolen konkluderte med at norske elever fikk lekser i samme grad som elever i andre land, men at leksene *fortsatt* følges opp i liten grad sammenliknet med andre land (Grønmo & Onstad, 2009).

Spørsmålet om oppfølging ble ikke gitt til lærerne i videregående skole. Men både lærere og elever i TIMSS Advanced fikk spørsmål om innholdet i leksene. Figur 8.16 viser prosentandelen av lærerne som sier de gir de ulike typene lekser «Alltid eller nesten alltid».

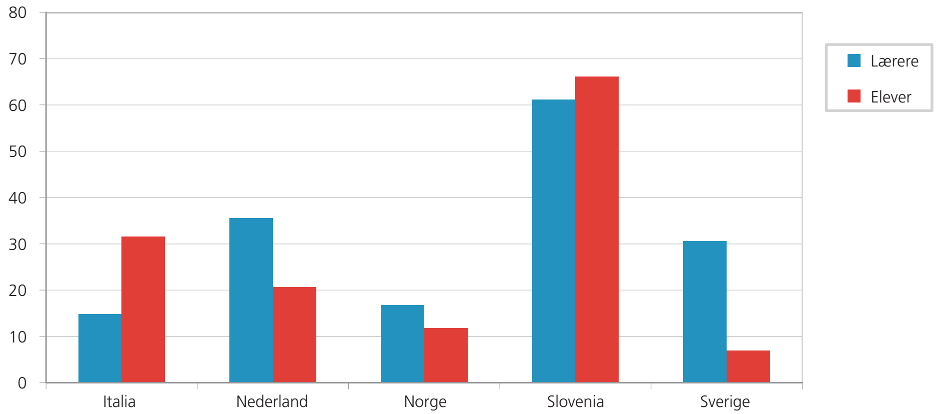
Det er et gjennomgående trekk at den vanligste typen lekser i alle land er å løse oppgaver. Fra 87 % til 100 % av lærerne i Norge og referanselandene svarer at de gir denne typen lekser «Alltid eller nesten alltid». Det er bare fra 0 % til 2 % i de samme landene som sier at de «Aldri eller nesten aldri» gir denne typen lekser. Også en stor del av elevene svarer at de «Alltid eller nesten alltid» gjør denne typen lekser. Når det gjelder å «Lese i læreboka» som lekse, varierer lærernes svar en del fra land til land. I Norge og Italia svarer over 30 % at de «Alltid eller nesten alltid» gir denne typen lekser, mens slovenske lærere gjør det i liten grad.



Figur 8.16 Typer matematikklekser gitt til elever i TIMSS Advanced. Prosentandelen av lærerne som svarer at de gir denne typen lekse «Alltid eller nesten alltid».

Den overveiende andelen av lærerne i alle deltakerlandene i TIMSS Advanced svarer at de bruker lærebok i undervisningen, og i alle landene unntatt på Filippinene har så godt som samtlige elever sin egen lærebok. Det sier noe om hvor sterk posisjon læreboka har i matematikkundervisningen.

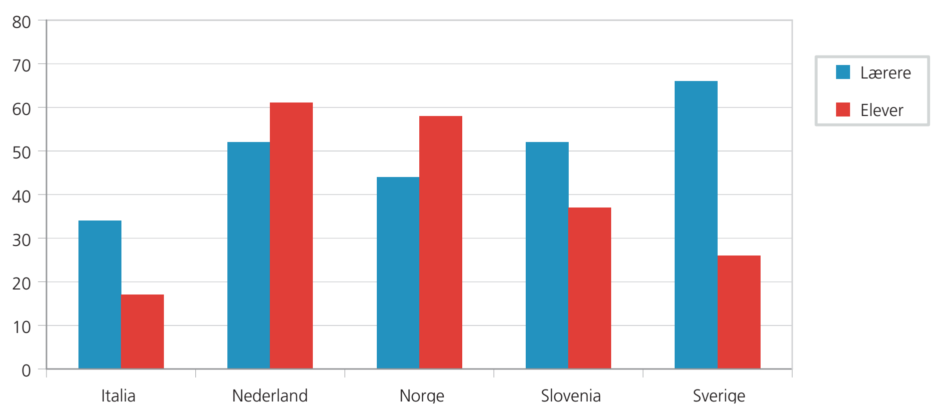
Figur 8.17 viser variasjonen mellom Norge og referanselandene når det gjelder i hvor stor grad lærerne *ikke* gir elevene i lekse å lese i læreboka, og i hvilken grad elevene *ikke* gjør slike lekser. I Slovenia svarer mellom 60 % og 70 % av både lærere og elever at denne typen lekser sjelden brukes. I motsatt ende av skalaen ligger Norge, med den laveste prosentandelen av elever og lærere sett under ett som sier at denne typen lekser sjelden brukes.



Figur 8.17 Prosentandeler av lærerne og av elevene som oppgir at de «Aldri eller nesten aldri» gir eller gjør lekser som går ut på å «Lese i læreboka».

Figur 8.16 viste at rundt 10 % av de norske lærerne oppga at de «Alltid eller nesten alltid» ga elevene lekser hvor de skulle «Lære formler og prosedyrer utenat». Figur 8.18 viser prosentandeler av lærerne og elevene som oppgir at de *ikke gir eller gjør* denne typen lekser.

Figur 8.18 viser at over 40 % av 3MX-lærene i Norge oppgir at de «Aldri eller nesten aldri» gir elevene i lekse å «Lære formler og prosedyrer utenat», mens nærmere 60 % av elevene oppgir at de «Aldri eller nesten aldri» gjør denne typen lekser. I alle landene unntatt Italia er det en relativt stor andel av elevene som sier at de «Aldri eller nesten aldri» gjør denne typen lekser.



Figur 8.18 Prosentandeler av lærerne og av elevene som oppgir at de «Aldri eller nesten aldri» gir eller gjør lekser som går ut på å «Lære formler og prosedyrer utenat».

For øvrig merker vi oss at begge figurene 8.17 og 8.18 viser et påfallende stort avvik mellom lærersvarene og elevsvarene i Sverige. Det ser ut til at svært mange svenske elever gjør lekser som lærerne hevder at de sjelden gir dem!

Betydningen av lekser, når det gjelder både tid og innhold, blir nærmere analysert og diskutert i kapittel 9. Det er også en sentral del av de avsluttende drøftingene i kapittel 11.

8.7 Forstyrrende elevfaktorer i matematikkundervisningen

Lærerne i TIMSS Advanced fikk spørsmål om i hvilken grad bestemte elevfaktorer la begrensninger på deres undervisning i matematikk. Svaralternativene som ble gitt, var «Ingen», «Liten», «Noen» og «Stor» grad. Vi har valgt å presentere svarene på to av disse spørsmålene. Det ene spørsmålet er knyttet til uinteresserte elever og det andre til elever som forstyrrer undervisningen. I tabell 8.2 vises prosentandelen av lærerne i referanselandene og i Norge som svarer «Noen» eller «Stor» grad på disse spørsmålene.

Tabell 8.2 Faktorer som legger begrensninger på matematikkundervisningen i TIMSS Advanced. Prosentandeler av lærerne som svarer at dette skjer i «Stor» eller «Noen» grad.

	Uinteresserte elever	Elever som forstyrrer undervisningen
Italia	74	39
Nederland	51	14
Norge	31	19
Slovenia	64	43
Sverige	40	13
Internasjonalt gjennomsnitt	55	33

Av tabell 8.2 framgår det at Norge ligger klart under det internasjonale gjennomsnittet for begge spørsmålene. Norge er det landet som i følge lærerne har den laveste andelen uinteresserte elever. Italia og Slovenia framstår som de to landene som oppgir størst problemer både med uinteresserte elever, og med elever som forstyrrer undervisningen. Tatt i betraktning at omtrent 20 % av årskullet tar avansert matematikk i Italia og vel 40 % i Slovenia, er det kanskje ikke så overraskende at en del av elevene i disse landene ikke er like motiverte for faget som elevene i land hvor populasjonen som testes bare utgjør en mindre andel av årskullet.

Tabell 8.3 Faktorer som la begrensninger på matematikkundervisningen på 8. trinn i TIMSS 2007. Prosentandeler av lærerne som svarte at dette skjedde i «Stor» eller «Noen» grad.

	Uinteresserte elever	Elever som forstyrrer undervisningen
Australia	56	46
Italia	81	68
Japan	29	11
Norge	52	41
Slovenia	47	55
Internasjonalt gjennomsnitt	58	45

På 8. trinn i grunnskolen rapporterte norske lærere også i underkant av det internasjonale gjennomsnittet på spørsmålene om uinteresserte eller forstyrrende elever, se tabell 8.3. Også her framsto Italia som det av referanselandene som tilkjennega størst problemer i tilknytning til slike elevfaktorer. På dette trinnet var hele årskullet med i populasjonene i alle landene som deltok i studien. I TIMSS 2007 sammenliknet vi også utviklingen på dette spørsmålet med resultatene fra TIMSS i 2003. Det gledelige resultatet av denne sammenlikningen var at det var klart færre norske lærere i 2007 enn i 2003 som oppga at undervisningen ble begrenset av disse elevfaktorene.

I de nasjonale rapportene for PISA 2000 og 2003 (Lie et al., 2001; Kjærnsli et al., 2004) indikerte funn at arbeidsmiljøet i norske klasserom var svært dårlig sammenliknet med andre land. Disse funnene ble ansett for å være godt fundert ettersom de bygde på data fra spørreskjemaer til både elever og rektorer. Publiseringen av funnene vakte stor offentlig interesse og debatt, og det var bred enighet om at det var lite ønskelig at Norge toppet denne rangeringen. Nå viser altså data både fra TIMSS Advanced og fra TIMSS 2007 at norske elever ikke «utmerker» seg med urolig atferd som forstyrrer undervisningen. Det må presiseres at spørsmålene knyttet til arbeidsmiljø er noe ulikt formulert i PISA og TIMSS, og i tillegg besvares de av ulike aktører (elever og rektorer i PISA, lærere i TIMSS). Slik sett er det som måles ikke helt det samme. Likevel tolket forfatterne av TIMSS-rapporten for 2007 dette som et uttrykk for at oppmerksomheten omkring denne problematikken har båret frukter, at man på mange skoler har jobbet målbevisst med å forbedre arbeidsmiljøet, og at situasjonen har blitt bedre på dette området i løpet av de siste årene (Grønmo & Onstad, 2009).

8.8 Avsluttende kommentarer

Vi har i dette kapittelet sett på en del sentrale momenter ved matematikkundervisningen som TIMSS Advanced kaster lys over. I mange tilfeller har vi sammenliknet med tilsvarende resultater fra TIMSS-undersøkelsene i grunnskolen.

Det kan virke som om norsk skole har lagt liten vekt på å utvikle grunnleggende ferdigheter og å automatisere disse hos elevene. På avansert nivå i videregående skole må for eksempel derivasjon og manipulering med algebraiske uttrykk ses på som grunnleggende ferdigheter.

I Norge brukes oppgaveløsing som en vanlig arbeidsform i matematikktimene. Den er også vanlig i andre land. Det som skiller Norge (og Sverige) fra andre land, er at denne arbeidsformen er *mer enerådende*. Slik framstår norsk matematikkundervisning som ganske ensformig.

Norge og Sverige utmerker seg som land med hyppig bruk av avanserte kalkulatorer. Likevel skårer disse landene lavt og har stor tilbakegang i matematikk i TIMSS Advanced. Tilgang på kalkulator gir altså ingen umiddelbar gevinst når det gjelder kunnskaper og ferdigheter i matematikk. Vi ser også at den norske hjelpemiddelkompetansen er dårlig. Hvis oppgavetypen ikke er lett gjenkjennelige og kalkulatorbruken ikke åpenbar og velkjent, viser norske elever liten evne til å nyttiggjøre seg maskinkraften på kreative måter.

Norske 3MX-lærere gir lekser i omtrent samme omfang som det internasjonale gjennomsnittet. I alle land er oppgaveløsing den klart vanligste formen for lekser. En tredel av de norske lærerne gir dessuten vanligvis i lekse å lese i læreboka, noe som er høyere enn i flere andre land.

Basert på data fra TIMSS i grunnskolen og TIMSS Advanced i videregående skole, ser det ut til å være en bedring i arbeidsmiljøet i norske matematikklasser, i den forstand at graden av begrensninger på grunn av uinteresserte og forstyrrende elever nå er relativt liten.

Norske 3MX-lærere har gjennomgående høy faglig kompetanse. Men de er gamle. I løpet av få år vil en stor andel av dem gå av med pensjon, og norsk skole står overfor et betydelig rekrutteringsproblem. I tillegg får lærerne lite etterutdanning som er faglig relevant. Norske skolemyndigheter ser ut til å legge relativt stor vekt på IKT i etter- og videreutdanning av lærere, men relativt liten vekt på en generell faglig og fagdidaktisk oppdatering.

Når det gjelder lærernes faglige kompetanse, skiller resultatene fra TIMSS Advanced seg klart ut fra resultatene fra tilsvarende undersøkelser i grunnskolen, der lærerne har god generell kompetanse, men i stor grad svak faglig spesialisering. – På de fleste andre områdene som behandles i dette kapittelet, er det slående hvor tydelig resultatene fra grunnskole og videregående skole stemmer overens. På denne måten bekrefter og forsterker TIMSS Advanced 2008 svært mye av det bildet som ble tegnet etter TIMSS 2007, og synes å gi oss et relativt konsistent inntrykk av matematikkens kritiske situasjon i hele det norske skolesystemet.

9 Undervisning og prestasjoner — et nasjonalt perspektiv

Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo i samarbeid med Jan-Eric Gustafsson

I kapittel 8 presenterte vi elevers og læreres svar på ulike spørsmål om matematikkundervisning, sett i et internasjonalt perspektiv. Det ble reflektert rundt hva som kjennetegner land som presterer godt og land som ikke presterer så godt, og resultatene fra TIMSS Advanced ble sett i sammenheng med tidligere TIMSS-studier i grunnskolen. I dette kapittelet konsentrerer vi oss om et nasjonalt perspektiv, med sikte på å finne undervisningsfaktorer som i Norge ser ut til å bidra til gode faglige prestasjoner. Resultatene fra disse analysene av nasjonale data blir drøftet i lys av resultatene fra de internasjonale analysene i kapittel 8.

Vi har anvendt metoder for såkalt *flernivåanalyse*. I vår sammenheng betyr det at når vi studerer hvordan elevenes skår henger sammen med en viss variabel, så analyserer vi denne sammenhengen både på et individuelt *elevnivå* og på et aggregert *klassenivå*. (I vårt tilfelle foretar vi altså *tonivåanalyser*.) Sentrale faktorer som vi undersøker, er organisering og undervisningsmetoder, bruk av kalkulator, omfang av lekser, og tidsbruk utenom skoletiden.

Analysene er gjennomført ved hjelp av programmet *Mplus* (Muthén & Muthén, 1998–2009), og vi har benyttet modelleringsomgivelsen *STREAMS* (Gustafsson & Stahl, 2005).

Det er viktig å være klar over at samme faktor kan peke i ulike retninger på ulike nivåer. Dette er nettopp noe av begrunnelsen for å foreta flernivåanalyser. Hvis en faktor korrelerer negativt på elevnivå men positivt på klassenivå, kan man risikere at disse effektene «slår hverandre ut» om man har en ettnivåanalyse. Dette er det viktig å være klar over når man fortolker resultater fra analysene. En faktor som viser seg å ha liten eller ingen effekt på elevnivå, kan likevel ha en signifikant effekt på klassenivå, eller omvendt. Man må huske på at de ulike faktorene er knyttet sammen i et komplekst bilde; individuelle valg vil ofte være knyttet til rammebetingelser på skolen og i klassen. På samme måte kan enkelte faktorer peke i én retning når vi sammenlikner land, men peke i en annen retning nasjonalt. Valg på den enkelte skole eller i den enkelte klasse kan på tilsvarende måte være avhengig av de nasjonale rammebetingelsene dette skjer under.

På grunn av kompleksiteten av analysene som presenteres i dette kapittelet, samt et behov for å dokumentere resultatene på en skikkelig måte, blir analyseresultatene presentert både i tabell og som figur. Figurene gir et grovere bilde enn tabellene, men inneholder den viktigste informasjonen man trenger for å kunne lese den beskrivende og diskuterende teksten omkring resultatene. Ønsker man mer detaljer om størrelser på korrelasjoner og resultater av signifikanstesting, kan man gå til tabellene.

9.1 Innledning

Målet med tonivåanalysene som presenteres i dette kapittelet er å gi dypere innsikt i hvordan ulike undervisningsrelaterte faktorer henger sammen med elevenes prestasjoner på individuelt elevnivå og på aggregert klassenivå. Et av målene med slike analyser er å avdekke forhold som står fram som positive på ett nivå, men som negative på et annet. Nå trenger det ikke å være så dramatisk som at fortegnet for korrelasjonen endrer seg. I mange tilfeller er det like interessant å kunne avdekke at en undervisningsfaktor korrelerer høyt med elevprestasjoner på klassenivå, men har en langt svakere korrelasjon når man ser på sammenhengen med elevprestasjoner på individuelt elevnivå.

Flernivåanalyser stiller store krav til den teoretiske forståelsen av hvordan man skal tolke eventuelle forskjeller mellom korrelasjoner på individ- og klassenivå. Skal denne typen analyser gi mening, må resultatene settes inn i en kontekstuell ramme. Kravene til flernivåanalyser er derfor store, både når det gjelder å gjennomføre selve analysene, og når det gjelder å gi mening til resultatene.

Flernivåanalyser av undervisningsfaktorer i skolen blir også komplekse om man drar inn elevenes hjemmebakgrunn knyttet til sosiale eller økonomiske forhold. Slike forhold kan ha en interaksjon med de undervisningsfaktorene man studerer. Igjen kan det være slik at en type interaksjon viser en positiv sammenheng på ett nivå, men ikke på et annet nivå. Den kontekstuelle tolkingsrammen som skal gi mening til resultatene, skaper utfordringer for hvordan dette skal forstås. Kompleksiteten stiller krav til den som skriver om dette, så vel som til leseren. Noen vil nok derfor oppleve dette kapittelet som vanskeligere tilgjengelig enn de andre kapitlene i boka, ikke minst fordi de fleste har lite erfaring med slike analyser. Man kan velge å forholde seg hovedsakelig til figurene og teksten. Tabellene inneholder de nødvendige detaljene som trengs for å dokumentere analysene, men som ikke er nødvendige for å forstå hovedinnholdet i kapittelet.

Alle tonivåanalysene er gjennomført to ganger; først uten å ta hensyn til elevenes sosiale hjemmebakgrunn, deretter en gang til hvor man korrigerer for denne. Å korrigere for elevenes sosiale bakgrunn innbærer i dette tilfellet å ta hensyn til at elever som har foreldre med høyere utdanningsnivå og med flere bøker i hjemmet, kan forventes å prestere bedre enn elever hvor foreldrene skårer lavere på disse faktorene. Sosial bakgrunn er her definert som en latent (ikke observerbar) samlevariabel av mors utdanningsnivå, fars utdanningsnivå og antall bøker hjemme, det vi kan kalle elevens sosiokulturelle kapital (se også kapittel 7).

Å justere eller korrigere for elevenes sosiokulturelle bakgrunn baseres på kunnskap om at dette er en sterk faktor når det gjelder å predikere hvor godt elevene presterer. I gjentatte studier har faktorer som antall bøker hjemme og mor og fars utdanningsnivå vist seg å være stabile faktorer for å predikere prestasjonsnivå (Grøgaard, Helland & Lauglo, 2008). At en klasse hvor elevene skårer høyt på skalaen over sosiokulturell kapital, presterer bedre enn en annen klasse hvor elevene har mindre sosiokulturell kapital, henger i stor grad sammen med elevenes ulike sosiokulturelle bakgrunn. Når man korrigerer for elevenes sosiale bakgrunn, *tar man hensyn til forventet prestasjonsnivå* for elevene basert på informasjon om denne bakgrunnen. Resultatene for en klasse justeres i forhold til om en klasse presterer bedre eller dårligere enn det man kunne forvente ut fra elevenes sosiale bakgrunn.

Ved å gjøre analyser der en ser på korrelasjoner med og uten å korrigere for sosial bakgrunn, får man to typer informasjon som bør drøftes i sammenheng. Den sosiokulturelle sammensetningen av elevgruppen vil kunne ha betydning for hvordan undervisningen legges opp på en skole eller i en klasse. Det kan for eksempel være slik at foreldre med høyere utdanning i større grad er med på å påvirke undervisningen ved å legge press på lærerne og skolen når det gjelder hva de skal gjøre i klassen for å få gode faglige resultater. Foreldrene kan på denne måten ha innvirkning på det som skjer på skolen, slik at når vi korrigerer for sosial bakgrunn kan effekten av noen undervisningsfaktorer framstå som mindre enn den er. Korrelasjonene vi har funnet mellom faktorer som beskriver undervisningen og elevenes faglige resultater i våre analyser, med og uten å ta hensyn til elevenes sosiokulturelle bakgrunn, peker i samme retning. Som oftest medfører justeringen for elevenes sosiale bakgrunn til mindre endringer som ikke påvirker de konklusjonene som trekkes. Det som endrer seg i noen av analysene er størrelsen på korrelasjonen og eventuelt om den er signifikant eller ikke. En grunn til at elevenes sosiale bakgrunn ikke slår like sterkt ut her som den gjør i analyser av grunnskolen, er at elever med lav sosial bakgrunn som har valgt full teoretisk realfagsfordypning i videregående opplæring, har bedre karakterer fra grunnskolen enn andre elever med samme bakgrunn (Bonesrønning, 2009; Hægeland, Kirkebøen & Skogstrøm, 2007).

Den kompetansen elevene har ervervet fra tidligere nivåer i grunnskolen og videregående skole kan legge føringer på undervisningsopplegget for den enkelte elev og for skoleklassen som helhet. Av den grunn vil det være en toveis kausalitet mellom undervisningsforholdene og elevenes prestasjoner. Læringsmiljøet påvirker elevenes prestasjoner i matematikk, mens elevenes kompetanse i matematikk påvirker undervisningspraksisen. I tolkningen av resultatene må en også være klar over at det kan være andre faktorer som vil påvirke undervisningen og elevenes prestasjoner, for eksempel lærerens undervisningserfaring og kompetanse i matematikk, fagdidaktikk og pedagogikk.

9.2 Metoder og organisering i undervisningen

Elevene fikk flere spørsmål om ulike aktiviteter i matematikktimene. Noen av spørsmålene handlet om hvordan man arbeider med det faglige innholdet i matematikktimene, for eksempel hvor ofte ulike læringsstrategier blir brukt. Andre spørsmål dreide seg om organisering av arbeidet.

Vi presenterer først resultatene av tonivåanalysene av spørsmål 16 i elevspørreskjemaet (alle spørreskjemaene ligger på våre nettsider: www.timss.no). Elevene skulle ta stilling til utsagnene nedenfor, og for hvert av dem angi hyppigheten av aktiviteten langs en såkalt Likert-skala med følgende alternativer: «Hver eller nesten hver time», «Omtrent halvparten av timene», «Noen timer» og «Aldri».

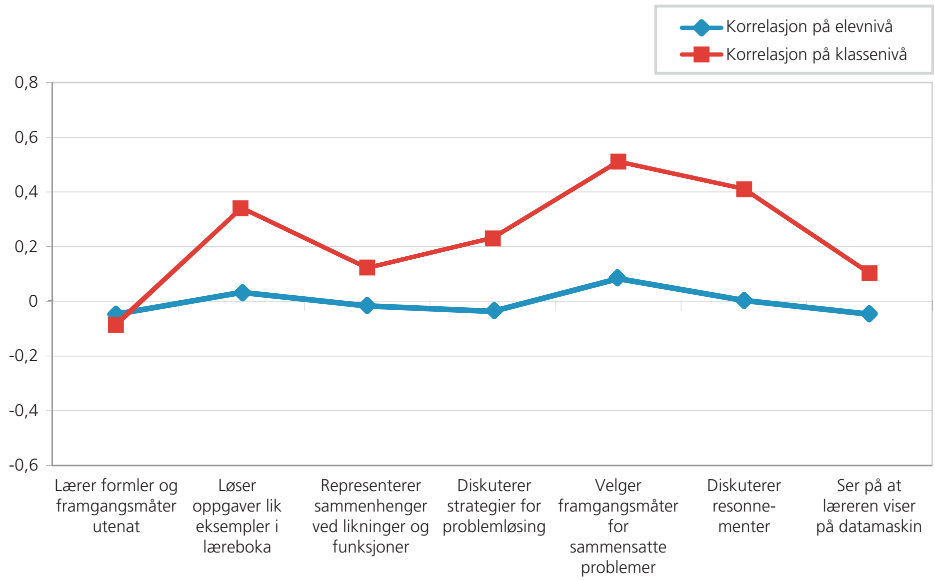
a. Vi lærer formler og framgangsmåter utenat
b. Vi løser oppgaver som likner på eksempler i læreboka
c. Vi setter opp likninger og funksjoner for å representere sammenhenger
d. Vi diskuterer strategier for problemløsing
e. Vi velger egne framgangsmåter for å løse sammensatte problemer
f. Vi diskuterer resonnementene våre
g. Vi ser på at læreren viser oss matematikk på en datamaskin

Tabell 9.1 og figur 9.1 viser resultatene av tonivåanalysene av elevenes svar på disse spørsmålene i forhold til deres matematikkprestasjoner. I tabellen angis først resultatene på individuelt elevnivå (kalt «Innen klasser») med korrelasjonskoeffisient *r* og *t*-verdi, deretter tilsvarende verdier på klassenivå (kalt «Mellom klasser»). Signifikante sammenhenger er angitt ved en stjerne (*) ved siden av *t*-verdien i tabellen. (All signifikans i dette kapittelet er på 0,05-nivå; det vil si at hvis sammenhengen er signifikant, er det mindre enn 5 % sannsynlighet for at den beregnede verdien er utslag av tilfeldighet. Et resultat er signifikant dersom $t > 1{,}96$ eller $t < -1{,}96$.)

Tabell 9.1 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå (Innen klasser) og på klassenivå (Mellom klasser) av hyppighet for de oppgitte aktivitetene i forhold til elevenes skår på matematikktesten. Signifikante t-verdier på 0,05-nivå er merket med stjerne (*), og signifikante verdier er gulmerket.

	Variabel-navn	Innen klasser		Mellom klasser	
		r	*t*	*r*	*t*
16a Lærer formler og framgangsmåter utenat	DL01	–0,05	–1,95	–0,09	–0,55
16b Løser oppgaver lik eksempler i læreboka	DL02	0,03	1,26	0,34	2,43*
16c Representerer sammenhenger ved likninger og funksjoner	DL03	–0,02	–0,62	0,12	0,79
16d Diskuterer strategier for problemløsing	DL04	–0,04	–1,86	0,23	1,74
16e Velger framgangsmåter for sammensatte problemer	DL05	0,08	3,74*	0,51	3,71*
16f Diskuterer resonnementer	DL06	0	–0,15	0,41	3,14*
16g Ser på at læreren viser på datamaskin	DL07	–0,05	–1,90	0,10	1,26

Som det framgår av tabell 9.1 og figur 9.1 er det tydelig at dette i hovedsak dreier seg om faktorer som har betydning på klassenivå. Korrelasjonene på elevnivå er gjennomgående svært små, mens tre av faktorene er positivt korrelert med elevenes prestasjoner på klassenivå. De to faktorene som viser høyest signifikant korrelasjon med prestasjoner på klassenivå, er hvor ofte elevene i skoletimene *velger egne framgangsmåter for å løse sammensatte problemer* (r = 0,51) og hvor ofte de *diskuterer resonnementene sine* (r = 0,41). At elevene velger egne framgangsmåter for å løse sammensatte problemer, er også positivt og signifikant relatert til prestasjoner på elevnivå, men her er korrelasjonen ganske liten (r = 0,08). Når det gjelder hvor ofte de *diskuterer strategier for problemløsing*, får man en korrelasjonskoeffisient på 0,23 på klassenivå, som er nær ved å være signifikant. Å *løse oppgaver lik eksempler i læreboka* viser ingen sammenheng med prestasjoner på elevnivå, men viser en signifikant sammenheng på klassenivå (r = 0,34).



Figur 9.1 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå og klassenivå av hyppighet for de oppgitte aktivitetene i forhold til elevenes skår på matematikktesten.

Når disse tonivåanalysene justeres for elevenes hjemmebakgrunn, blir det noen mindre endringer for spørsmålene om å velge egne framgangsmåter og diskutere resonnementer, men det påvirker ikke de konklusjonene som er trukket. Den viktigste endringen gjelder spørsmålet om hvor ofte man *diskuterer strategier for problemløsing* i klassen. På klassenivå øker den positive korrelasjonskoeffisienten fra 0,23 til 0,31 og blir da signifikant. På elevnivå får man også en signifikant korrelasjon, men den er svært liten og negativ (r = –0,05).

Alle disse undervisningsmetodene handler om diskusjon og argumentasjon omkring faglig innhold i timene på skolen. Resultatene av analysene tyder på at skoleklasser der undervisningsmetoder som diskusjon og argumentasjon omkring faglig innhold i matematikk benyttes, oppnår bedre resultater enn klasser der slikt forekommer i liten grad. Betydningen av faglige diskusjoner i klasserommet kommer klart til utrykk både i sosialkonstruktivistisk og sosiokulturell læringsteori; begge er bygd på Vygotskys ideer (Vygotsky, 2001). I følge sosiokulturell læringsteori framheves det at læreren skal være den personen som sørger for at kommunikasjonen i klasserommet knyttes an til det som regnes for å være matematisk anerkjente begreper og posisjoner (Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2006). Se kapittel 2 for mer om læringsteorier.

Korrelasjonene på individuelt elevnivå mellom diskuterende og reflekterende undervisningsmetoder og elevenes prestasjoner er imidlertid små og som regel heller ikke signifikante. Elevers subjektive oppfatning av hvor hyppig en metode brukes, kan være påvirket av hvor positiv man selv er til metoden, noe som igjen kan henge sammen med eget prestasjonsnivå. En elev som strever faglig kan kanskje oppfatte diskuterende og argumenterende metoder som vanskeligere å forholde seg til, da de forutsetter at man har en viss faglig basis for å delta i slike diskusjoner.

Siden de tre faktorene som dreier seg om diskusjon og argumentasjon i matematikkimene, alle viser et positivt samsvar med prestasjoner på klassenivå, er en nærliggende tolkning av resultatene at mer bruk av diskuterende og argumenterende metoder i matematikkundervisningen (i alle fall i 3MX) vil kunne bidra til å bedre klassens faglige resultater. En alternativ tolkning kan være at det er lettere for læreren å ha denne typen undervisning i klasser med høytpresterende elever. Det faktum at sammenhengen mellom bruk av diskuterende og argumenterende metoder i undervisningen og prestasjonsnivå i klassene ikke synker når man justerer for elevenes hjemmebakgrunn, taler imidlertid mot en slik tolkning.

I kapittel 8 ble norske elevers svar på spørsmål om argumenterende og diskuterende undervisningsmetoder sammenliknet med elevsvar i andre land, og også med elevsvar på tilsvarende spørsmål i TIMSS 2007 på 8. trinn og på 4. trinn. Konklusjonene som ble trukket i kapittel 8, var at resultatene for Norge *på alle trinn,* både i grunnskolen og i videregående skole, gir et bilde av norsk matematikkundervisning som mer ensidig med hensyn til bruk av undervisningsmetoder enn i andre land. Norge ser spesielt ut til å skille seg fra andre land ved at metoder som går på diskusjon og argumentasjon relatert til faglig innhold er langt mindre brukt. Resultatene fra tonivåanalysene som presenteres i dette kapittelet bidrar til å underbygge konklusjonene fra kapittel 8 om at slike metoder er for lite brukt i norsk matematikkundervisning, og at en økt bruk vil kunne få en positiv effekt på hvor godt elevene i en klasse presterer. Det er i tråd med resultatene fra tidligere matematikkdidaktisk forskning presentert i kapittel 2, som nettopp understreker behovet for slike arbeidsmetoder for å kunne utvikle matematisk kompetanse, ikke minst når det gjelder utviklingen av gode og fleksible begreper (Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2006).

At elevene ofte arbeider med oppgaver lik eksemplene i læreboka, viser også en signifikant sammenheng med elevenes prestasjoner på klassenivå, men korrelasjonen er noe lavere (r = 0,34) enn for spørsmålene om selv å velge framgangsmåter og å diskutere resonnementer. Oppgaveløsing er en helt sentral arbeidsform i matematikk. At hyppig bruk av denne arbeidsformen er positivt korrelert med hvor gode de faglige prestasjonene i en klasse er, er derfor i samsvar med det man kunne forvente. Analyser som justerer for elevenes hjemmebakgrunn viser i store trekk det samme. I kapittel 8 pekes det på at dette er den eneste arbeidsmåten hvor Norge ligger på det internasjonale gjennomsnittet, og at det å arbeide mye med oppgaver i matematikk er en framtredende arbeidsmåte i Norge som i de fleste andre land. Det som trekkes fram som problematisk når man sammenlikner Norge med andre land, er at denne metoden framstår som langt mer dominerende i Norge, så dominerende at det ble kommentert i den internasjonale rapporten fra TIMSS Advanced: «Interestingly, according to Norwegian students, the only one of these activities that occurred in half or more of their advanced mathematics classes was solving problems similar to those in their textbooks.» (Mullis et al., 2009, side 163)

Det påpekes også i kapittel 8 at denne ensidige bruken av individuelle arbeidsmetoder i norsk skole samsvarer godt med tilsvarende sammenlikninger mellom land i TIMSS-studier av matematikkundervisning i grunnskolen (se figur 8.8). I Grønmo et al. (2004) og Bergem (2009) ble overdreven bruk av individuelle arbeidsformer i matematikk i Norge påpekt. Tonivåanalysene av dataene i TIMSS Advanced understøtter tidligere konklusjoner om at en måte å bedre de norske resultatene på, kan være mindre ensidig vekt på individuell oppgaveløsing og mer bruk av diskuterende og argumenterende metoder. Variasjon i bruk av metoder er viktig både for å motivere og engasjere elever og fordi ulike metoder er mer eller mindre velegnet i forbindelse med ulike faglige mål i matematikk (Cockroft, 1982; HMI, 1985). For eksempel krever læring av ferdigheter og utvikling av solide og fleksible begreper ulike tilnærmingsmetoder og læringsstrategier (Grønmo & Throndsen, 2006). Det står mer om dette i kapittel 2 og i rapporten fra TIMSS 2007 (Grønmo & Onstad, 2009).

Å lære formler og framgangsmåter utenat er også en aktivitet der norske elevers svar på hvor ofte den ble brukt, lå lavt i forhold til det internasjonale gjennomsnittet (se kapittel 8). Tonivåanalysen av dette spørsmålet viser en svak negativ sammenheng på grensen til å være signifikant på elevnivå, og med en svak tendens i samme retning på klassenivå, men den er langt fra å være signifikant. Når vi justerer for elevenes hjemmebakgrunn blir resultatet omtrent det samme på elevnivå, mens den svake negative sammenhengen på klassenivå faller bort. I motsetning til spørsmålene om hvor ofte man diskuterer og argumenterer rundt matematiske problemer i timene, skårer også land som presterer relativt godt i TIMSS Advanced lavt på spørsmålet om hvor ofte man arbeider med sikte på å lære formler og framgangsmåter utenat. Det gjelder for eksempel Slovenia og Italia. I kapittel 8 blir dette sett i forhold til tilsvarende resultater på 8. trinn i TIMSS 2007. Også på dette trinnet skåret norske elever lavt på spørsmålet, men her sto det *i klar motsetning* til relativt høytpresterende land som Slovenia og Italia, som begge brukte denne metoden ofte. I drøftingen i kapittel 8 reflekteres det over hvorvidt det er *viktigere* med hyppig bruk av en slik metode på lavere trinn i skolen. Hvis elevene allerede har lært seg denne måten å arbeide på, er det kanskje ikke like stort behov for å benytte den ofte i matematikktimene på høyere trinn? Tidligere analyser som drøfter TIMSS- og PISA-resultater underbygger betydningen av denne arbeidsmetoden som viktig for å gi elever i grunnskolen gode basiskunnskaper i matematikk; for eksempel slås det i rapporten fra PISA 2003 fast at «Dataene indikerer at gode skoler legger større vekt på ferdighetstrening, vi kan gjerne kalle det «drilling» av ferdigheter i matematikk.» (Kjærnsli et al., 2004, s. 239) Den svake, negative (men ikke signifikante) sammenhengen vi i TIMSS Advanced finner mellom utenatlæring og matematikkprestasjoner på elevnivå, kan være en svak indikator på at elever som bruker denne metoden ofte i 3MX er elever som ikke har trenet inn de nødvendige ferdighetene på lavere trinn.

Elevene fikk dessuten flere spørsmål om hvor ofte man bruker ulike måter å organisere undervisningen på i matematikktimene; vi kan kalle det en prioritering av organiseringsmåter. (Hele elevspørreskjemaet finnes på våre nettsider, www.timss.no, se spørsmål 15 med underspørsmål.)

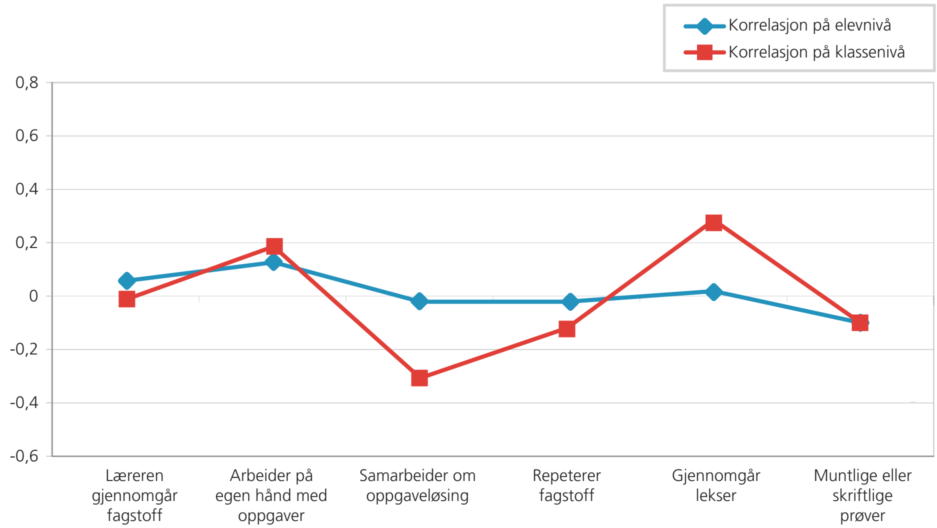
Elevene ble bedt om å svare på hvor ofte de gjør følgende i 3MX-timene langs den samme typen Likert-skala som tidligere, med alternativene «Hver eller nesten hver time», «Omtrent halvparten av timene», «Noen timer» og «Aldri»:

a. Vi hører på at læreren gjennomgår/foreleser fagstoff
b. Vi arbeider med oppgaver på egen hånd
c. Vi samarbeider om å løse matematikkoppgaver (grupper/hel klasse)
d. Vi repeterer gjennomgått fagstoff
e. Vi gjennomgår lekser
f. Vi har muntlige eller skriftlige prøver

Tabell 9.2 og figur 9.2 viser resultatene av tonivåanalysene av elevenes svar på disse spørsmålene i forhold til deres matematikkprestasjoner. Som i hele dette kapittelet er første nivå i analysen individuelt elevnivå, mens andre nivå er klassenivå. I tabellen angis både korrelasjonskoeffisientene *r* og *t*-verdiene for å vise om resultatene er signifikante. Figur 9.2 gir en grovere, men også lettere tilgjengelig oversikt over korrelasjonene for de ulike organisasjonsmåtene.

Tabell 9.2 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå (Innen klasser) og på klassenivå (Mellom klasser) av hyppighet for de oppgitte aktivitetene i forhold til elevenes skår på matematikktesten. Signifikante t-verdier på 0,05-nivå er markert med stjerne (*), og signifikante verdier er gulmerket.

	Variabel-navn	Innen klasser		Mellom klasser	
		r	*t*	*r*	*t*
15a Læreren gjennomgår fagstoff	ACLT	0,06	2,10*	–0,01	0,14
15b Arbeider på egen hånd med oppgaver	ACWP	0,13	5,04*	0,19	2,20*
15c Samarbeider om oppgaveløsing	ACWT	–0,02	–0,83	–0,31	–1,99*
15d Repeterer fagstoff	ACRT	–0,02	–0,72	–0,12	–0,83
15e Gjennomgår lekser	ACRH	0,02	0,92	0,29	3,39*
15f Muntlige eller skriftlige prøver	ACTQ	–0,10	–4,07*	–0,10	–0,48



Figur 9.2 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå og klassenivå av hyppighet for de oppgitte aktivitetene i forhold til elevenes skår på matematikktesten.

Den eneste av disse faktorene som framstår som positiv (det vil si at hyppig bruk av faktoren korrelerer med høy matematikkskår) på både elevnivå (r = 0,13) og klassenivå (r = 0,19), er at *elevene arbeider med oppgaver på egen hånd* i matematikktimene, men korrelasjonene er temmelig lave. Hvis vi gjennomfører de samme analysene justert for hjemmebakgrunn synker korrelasjonene litt, særlig på klassenivå hvor den positive sammenhengen med prestasjoner ikke lenger er signifikant. Dette resultatet samsvarer likevel med resultatet fra spørsmål 16b ovenfor om hvor ofte elevene løser oppgaver som likner på eksempler i læreboka, som viste en noe tydeligere positiv sammenheng med hvor godt en klasse presterer. Under drøftingen av resultatet ble det påpekt at det i alle land blir arbeidet mye med individuell oppgaveløsing, og at slikt arbeid generelt er positivt korrelert med elevprestasjoner.

Hvor ofte man har *prøver* viser en liten sammenheng med prestasjoner på både elev- og klassenivå, som bare er signifikant på elevnivå. Resultatet blir tilnærmet det samme om man justerer for hjemmebakgrunn. Det er viktig i tolkningene av resultatene å ha klart for seg at disse spørsmålene dreier seg om *hyppighet*. Resultatet kan ikke tolkes som at man ikke skal ha prøver, og heller ikke som at prøver påvirker elevenes prestasjoner negativt. Det analysen viser, er at økende hyppighet i bruk av prøver mot halvparten av timene eller oftere, ikke samsvarer positivt med elevprestasjonene. En mulig tolkning av den negative sammenhengen på elevnivå kan være at elever som ikke har gode resultater, subjektivt bedømmer at det er vanligere med prøver enn høytpresterende elever gjør. Stresset med å ha prøver oppleves nok som større for lavtpresterende elever.

En hyppig *repetisjon av fagstoff* gir ingen signifikant effekt i noen retning eller på noe nivå i analysen. Analysen sier imidlertid ikke noe om faglig svake elever kan forbedre sine resultater med mye bruk av denne arbeidsformen. Dataene innholder heller ikke opplysninger om hva som repeteres, om det er stoff som de nylig har arbeidet med, eller pensum fra tidligere år som de skal bygge videre på i det de arbeider med. Hvor ofte man *samarbeider om oppgaveløsing* har ikke noen uttalt effekt på individnivå, mens analysene tyder på en negativ sammenheng på klassenivå. Når man justerer for hjemmebakgrunn synker korrelasjonen på klassenivå fra –0,31 til –0,21 og er ikke lenger signifikant.

Hyppig *gjennomgang av lekser* korrelerer ikke i noen retning med prestasjoner på elevnivå, mens man får en signifikant positiv sammenheng på klassenivå med r = 0,29. Justerer vi for hjemmebakgrunn, får vi fortsatt en positiv korrelasjon på klassenivå, men den synker til r = 0,18, som nå er like under grensen til å være signifikant. Forholdet mellom lekser og prestasjoner blir mer utdypet og drøftet i neste delkapittel.

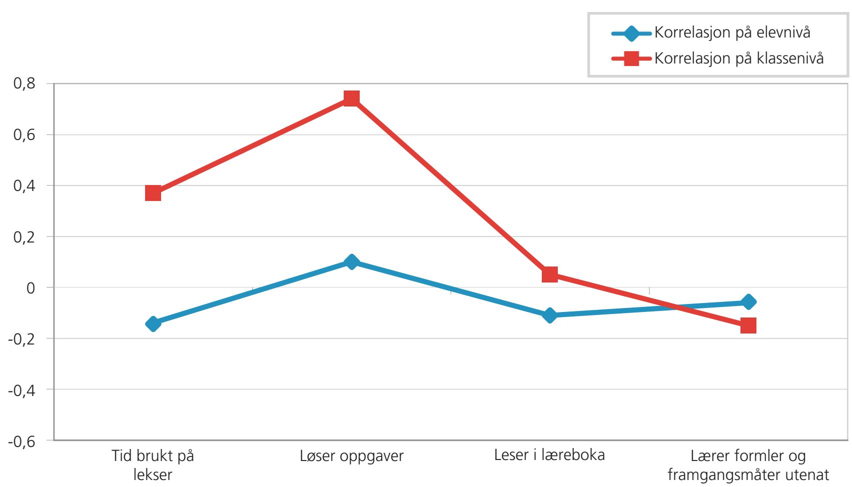
9.3 Lekser – omfang, innhold og oppfølging

«Homework is a 'complicated thing', a 'battlefield' for teachers, students, and parents» (Trautwein, 2007, s. 372, med referanser til Corno (1996) og Cooper (2001)). At lekser er noe som mange har meninger om, understrekes ikke minst av all den diskusjonen som har vært den siste tiden om dette i norsk skole. Det er sterke meninger, ikke bare blant lærere, elever og foreldre, men i like stor grad blant politikere om dette. Analysene ovenfor viser en positiv sammenheng på klassenivå mellom matematikkprestasjoner og hvor ofte man gjennomgår leksene i timene, med en signifikant korrelasjonskoeffisient på r = 0,29. Denne synker riktignok til r = 0,18 når man justerer for elevenes sosiale bakgrunn, nå med en t-verdi på 1,86 som ikke er signifikant, men som er nær grensen til å være det.

I TIMSS Advanced fikk elevene spørsmål om hvor lang tid de bruker på matematikkleksene per uke, og noen spørsmål om hvor ofte de arbeider på ulike måter når de gjør lekser. Tabell 9.3 og figur 9.3 viser resultatene av tonivå-analyser av disse spørsmålene. I spørsmål 18A om tid brukt på lekser skulle de svare ved å oppgi antall minutter, på resten av spørsmålene skulle elevene svare langs en Likert-skala, men denne gangen med følgende svaralternativer: «Alltid eller nesten alltid», «Noen ganger» og «Aldri eller nesten aldri».

Tabell 9.3 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå (Innen klasser) og på klassenivå (Mellom klasser) av omfang og innhold i lekser i forhold til elevenes skår på matematikktesten. Signifikante t-verdier på 0,05-nivå er merket med stjerne (*), og signifikante verdier er gulmerket.

	Variabelnavn	**Innen klasser**		**Mellom klasser**	
		r	***t***	***r***	***t***
18A Tid brukt på lekser	HTIM	–0,14	–5,40*	0,37	2,69*
18Ba Løser oppgaver	HPQS	0,10	3,47*	0,74	3,64*
18Bb Leser i læreboka	HRTB	–0,11	–4,33*	0,05	0,30
18Bc Lærer formler og framgangsmåter utenat	HMFP	–0,06	–2,30*	–0,15	–0,39

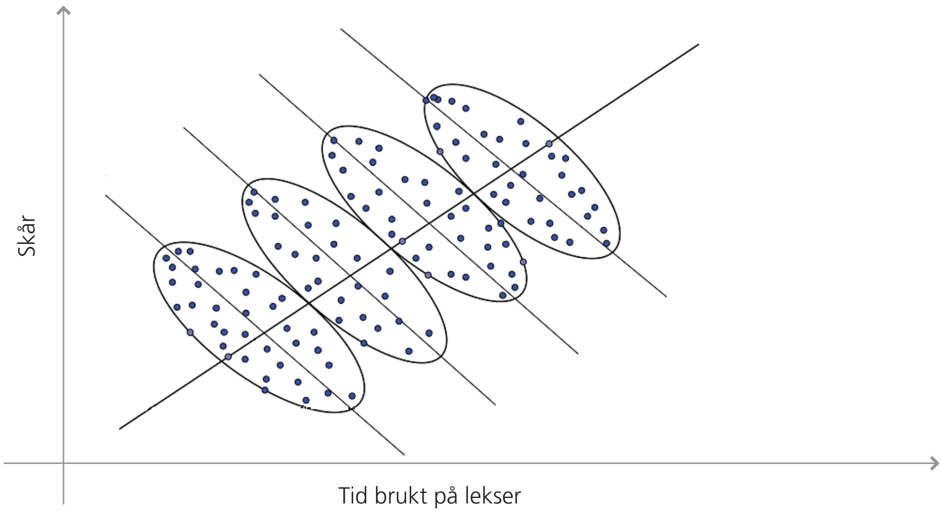


Figur 9.3 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå og klassenivå av omfang og innhold i lekser i forhold til elevenes skår på matematikktesten.

Når det gjelder *tid brukt på lekser*, viser våre analyser en signifikant negativ sammenheng med prestasjoner på elevnivå, med en korrelasjonskoeffisient på –0,14. På klassenivå peker sammenhengen i stikk motsatt retning, med en klar og signifikant positiv korrelasjon på 0,37. Analyser hvor vi justerte for elevenes hjemmebakgrunn ga ikke andre resultater.

Det ble innledningsvis i dette kapittelet pekt på at styrken i tonivåanalyser er at de fanger opp korrelasjoner dersom de går i ulik retning på ulike nivåer og derfor kan «slå hverandre ut» om man gjør analyser på bare ett nivå. Det er viktig å ha dette klart for seg når vi skal tolke resultatene. Hadde vi gjort en ettnivåanalyse på elevnivå og fått en negativ korrelasjon med prestasjoner, kunne man lett tolket det som om jo mer tidkrevende lekser man gir, desto dårligere blir det faglige resultatet. Nå må vi imidlertid forholde oss til at det er en markant positiv korrelasjon med å gi mer tidkrevende lekser på klassenivå, samtidig som det er en negativ korrelasjon på elevnivå, og da blir en slik tolkning problematisk. En mer nærliggende tolkning er at det er positivt for prestasjonene i en klasse om læreren gir tidkrevende lekser.

Elever som sliter faglig vil kunne ha behov for å bruke mer tid på lekser enn andre elever. Innenfor klassen er det altså en tendens til at elever som bruker lang tid på leksene, presterer svakere enn de som bruker mindre tid. Dette gjelder for de fleste klasser. Klasser som har tidkrevende lekser, har imidlertid denne negative sammenhengen mellom elevene i klassen «på et høyere nivå» enn klasser hvor det gis lite lekser. – Dette er skissemessig illustrert i figur 9.4, der vi tenker oss fire klasser med negativ korrelasjon mellom leksetid og matematikkskår innenfor hver klasse og positiv korrelasjon mellom leksetid og matematikkskår når vi sammenlikner mellom klassene. (I virkeligheten kan det være overlapp mellom klassene.)



Figur 9.4 Skissemessig illustrasjon av negativ korrelasjon innenfor klasser og positiv korrelasjon mellom klasser. Prikkene representerer elever og ringene klasser, mens linjene antyder korrelasjon.

En slik tolkning samsvarer med resultater fra annen forskning som har gjort tonivåanalyser i studier av leksers betydning for elevers prestasjoner. Trautwein (2007, s. 385) peker på følgende når det gjelder forholdet mellom tid brukt på lekser og prestasjoner på elevnivå: «This association between longer homework time and low achievement is quite plausible: it takes weaker students longer to complete a given set of tasks.» I samme artikkel pekes det på en *positiv sammenheng på klassenivå* mellom tid brukt på lekser og elevenes prestasjoner. Selv om det her ikke kan sies noe sikkert om årsak og virkning, er det likevel naturlig å konkludere med at det kan virke positivt på prestasjonene i en klasse om læreren gir lekser som er mer tidkrevende enn om vedkommende gir lekser som det tar mindre tid å gjøre.

Ikke bare tiden brukt på lekser, men i like stor grad *innholdet* i disse kan antas å ha betydning for hvor godt elevene presterer i matematikk. I TIMSS Advanced fikk elevene tre spørsmål knyttet til innholdet i leksene: om de løste oppgaver, om de leste i læreboka, og om de lærte formler og framgangsmåter utenat. Resultatet av tonivåanalysene på disse spørsmålene er også presentert i tabell 9.3 og figur 9.3 over. Her skulle elevene svare på hyppighet langs en Likert-skala med alternativene «Alltid eller nesten alltid», «Noen ganger» og «Aldri eller nesten aldri». Analysene viser at hyppig *løsing av oppgaver* som lekse har en positiv og signifikant sammenheng med prestasjoner både på elevnivå og på klassenivå. Korrelasjonskoeffisienten er bare 0,10 på elevnivå, men hele 0,74 på klassenivå. Resultatene fra to andre spørsmål om løsing av oppgaver *på skolen* viste begge en positiv sammenheng med prestasjoner på klassenivå, sterkest på spørsmålet om å løse oppgaver lik eksempler i læreboka (r = 0,34, se tabell 9.1) og noe lavere på spørsmålet om å løse oppgaver på egenhånd (r = 0,19, se tabell 9.2). På de to spørsmålene var det bare det siste om å løse oppgaver på egenhånd som også hadde en signifikant korrelasjon på elevnivå (r = 0,13). Den markert høyere korrelasjonen med klassens prestasjoner når det gjelder å løse oppgaver *som lekser*, tyder på at i hvilken grad elevene løser matematikkoppgaver som lekser utenom undervisningstimene på skolen, er en langt sterkere faktor for hvor godt klassen presterer enn det å arbeide med oppgaver i timene.

En mulig tolkning av dette kan være at det er læreren som i stor grad styrer hva som gjøres i matematikktimene på skolen, mens det er mer opp til den enkelte elev om man også følger opp lekser og løser oppgaver utenom skoletimene. Selv om man ikke kan si noe sikkert om hva som er årsak og hva som er virkning i denne typen analyser, er en nærliggende konklusjon at lærere som gir elevene mer tidkrevende lekser med løsing av oppgaver utenom timene vil kunne stimulere til bedre faglige prestasjoner i en klasse.

Lekser som dreier seg om at elevene *leser i læreboka* og at de *lærer formler og framgangsmåter utenat*, har begge en signifikant, men svak, negativ korrelasjon med prestasjoner på elevnivå, men ingen signifikant korrelasjon på klassenivå. Det kan tyde på at det til en viss grad er elever som sliter med faget som gjør dette som lekser. For mer om lekser og deres betydning for elevenes faglige utvikling viser vi til Trautwein (2007), som gir en god oversikt, og som ved hjelp av tonivåanalyser utfordrer konklusjoner gjort uten å ta hensyn til det komplekse samspillet mellom elevnivå og klassenivå på dette området.

9.4 Bruk av kalkulator

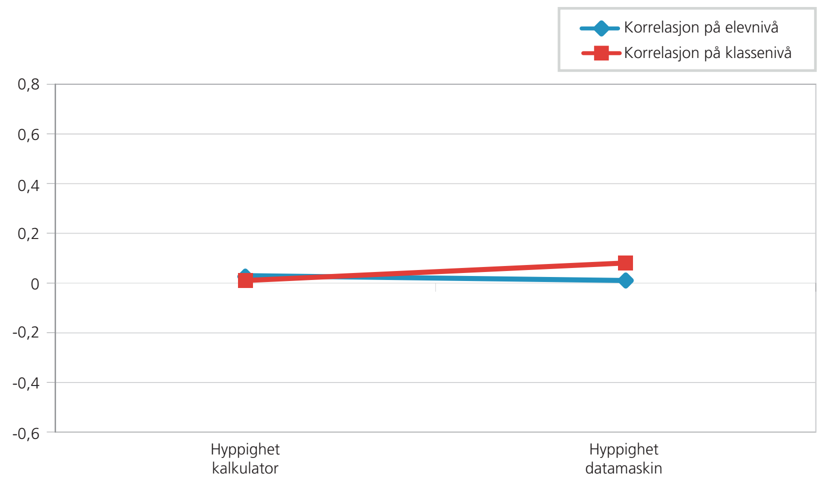
Elevenes bruk av kalkulator har vært og er gjenstand for mye diskusjon. Dette er drøftet i kapittel 8, der det blant annet framkommer at hyppigheten av kalkulatorbruk varierer en god del mellom land (se figur 8.11). I kapittel 8 peker vi på det tankevekkende at de to landene som har størst tilbakegang i prestasjoner fra forrige studie, Norge og Sverige, og hvor elevene presterer lavt i TIMSS Advanced, også er to land som utmerker seg med mye bruk av kalkulator. Elevene i disse landene har dessuten de mest avanserte kalkulatorene.

Det var fri bruk av kalkulator i TIMSS Advanced-testen i 2008, slik det også var da studien ble gjennomført første gang i 1995 (1998 i Norge). Det har imidlertid skjedd en stor utvikling når det gjelder kalkulatorer i løpet av denne tiden. Norske elever brukte også i 1998 kalkulator i stor grad, men disse var enklere enn de kalkulatorene elevene har i dag. Majoriteten av de norske elevene har en kalkulator som kan tegne grafer, og nesten 20 % har en som også kan regne med symboler. De to landene som presterer best når man tar dekningsgraden i årskullet med i betraktningen – Slovenia og Italia – utmerker seg ved liten bruk av kalkulator og ved å ha relativt enkle kalkulatorer sammenliknet med elever i Norge og Sverige (se kapittel 8).

Elevene fikk spørsmål om hvor ofte de bruker a) kalkulator og b) datamaskin, og svarte langs en Likert-skala med alternativene «Hver eller nesten hver time», «Omtrent halvparten av timene», «Noen timer» og «Aldri». Resultatene av tonivåanalyser av sammenhengen mellom hyppigheten av bruk av kalkulator eller datamaskin og matematikkprestasjoner blant norske elever er presentert i tabell 9.4 og figur 9.5.

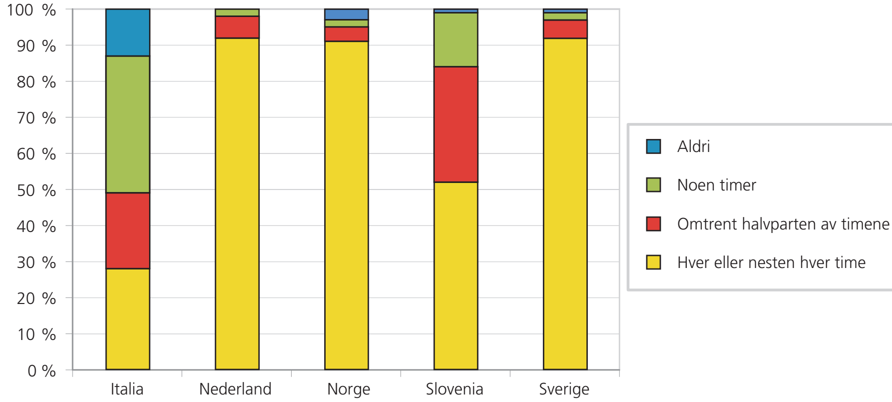
Tabell 9.4 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå (Innen klasser) og på klassenivå (Mellom klasser) av hyppighet i bruk av kalkulator og datamaskin i matematikktimene i forhold til elevenes skår på matematikktesten.

	Variabelnavn	**Innen klasser**		**Mellom klasser**	
		r	***t***	***r***	***t***
17Aa Hyppighet kalkulator	ULCA	0,03	0,76	0,01	0,16
17Ab Hyppighet datamaskin	ULCO	0,01	0,21	0,08	0,98



Figur 9.5 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå og klassenivå av hyppighet i bruk av kalkulator og datamaskin i matematikktimene i forhold til elevenes skår på matematikktesten.

Tabell 9.4 viser ingen signifikante sammenhenger mellom hyppighet i bruk av kalkulator eller datamaskin og prestasjoner, verken på elevnivå eller på klassenivå. Korrelasjonene i figur 9.5 er så små at de knapt fortjener å kommenteres. Nå er fordelingen på variabelen om kalkulatorbruk skjev i den forstand at hele 92 % av de norske elevene oppgir at de bruker kalkulator i alle eller nesten alle timene, noe som vanskeliggjør slike analyser, se figur 9.6 under. Som vi ser av denne figuren varierer det en god del mellom land hvor ofte elevene bruker kalkulator, med Italia og Slovenia som de landene som bruker den minst.



Figur 9.6 Elevenes svar på hvor ofte de bruker kalkulator i matematikktimene i Norge og i referanselandene.

I tre land – Norge, Sverige og Nederland – oppgir over 90 % av elevene at de bruker kalkulator så godt som i alle matematikktimene på skolen. De tilsvarende tallene er 28 % i Italia og 52 % i Slovenia, de to landene som framstår som de som presterer best når man tar hensyn til dekningsgraden i årskullet. Nederlandske elever bruker kalkulator i samme grad som elever i Norge og Sverige, samtidig som Nederland er det landet som presterer best når vi ikke tar hensyn til dekningsgrad. Våre data gir derfor ikke grunnlag for å si generelt at mye bruk av kalkulator fører til svake prestasjoner i matematikk.

Det er flere ting man skal huske på i denne sammenhengen, som at disse spørsmålene bare spør om hyppighet i bruk av kalkulator; de sier ingen ting om hvordan man bruker den. En kalkulator kan brukes som en «krykke», i den forstand at elevene bruker den til å gjøre beregninger som det ville vært en fordel å ha trent inn som grunnleggende ferdigheter. Eksempler på det er elever som bruker kalkulator til multiplikasjon av ensifrede tall (den lille multiplikasjonstabellen), eller elever med avansert matematikk i videregående skole som bruker symbolregner til enkel derivasjon, som på dette nivået må kalles en grunnleggende matematikkferdighet. (Se kapittel 11 hvor vi drøfter kalkulatorbruk og grunnleggende ferdigheter.)

Fra et læringsperspektiv er det noe helt annet om elevene bruker kalkulatoren til å løse avanserte problemer som det kan være vanskelig å gjøre uten denne typen teknisk hjelp. Resultatene på enkeltoppgaver som er presentert i kapitlene 4, 5 og 6 viser at norske elever ofte gjør det best på oppgaver som ligger til rette for enkel bruk av kalkulator, oppgaver som tester det som man kanskje burde ha trent inn uten kalkulator, mens de ikke synes å beherske mer avansert og kreativ kalkulatorbruk særlig godt. (Se for eksempel geometrioppgave 8 i kapittel 6.) På bakgrunn av flere av resultatene i TIMSS Advanced er det betimelig å ta en diskusjon om *den norske bruken av kalkulator* virkelig bidrar til å utvikle matematisk forståelse bedre enn det man kunne uten slike tekniske hjelpemidler, eller om vi i hovedsak lar elevene bruke teknologien som krykke.

9.5 Bruk av tid utenfor skolen

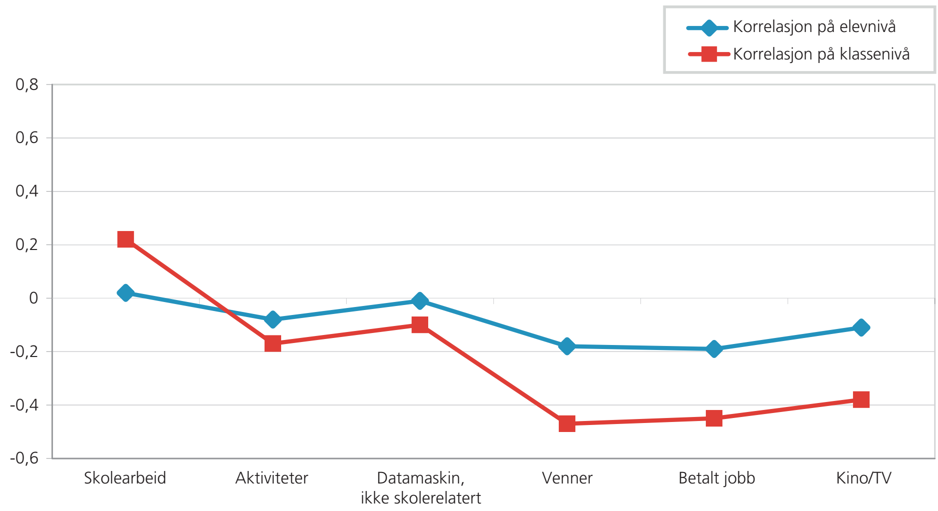
Her presenteres resultatene av tonivåanalyser av elevenes svar om bruk av tid utenfor skolen. Også slike faktorer kan man anta innvirker på deres skoleprestasjoner. Dette er diskutert i kapittel 7, men da i et internasjonalt perspektiv hvor vi sammenlikner de norske resultatene med resultater fra andre land (se figur 7.4). Elevene fikk spørsmål om hvor mye tid de bruker på hver av aktivitetene nedenfor på en vanlig skoledag (se www.timss.no for elevspørreskjema). Elevene skulle svare langs en Likert-skala med alternativene «Ingen tid», «Mindre enn 1 time», «1–2 timer», «Mer enn 2, men mindre enn 4 timer» og «4 eller flere timer» på følgende spørsmål:

a. Jeg gjør skolearbeid
b. Jeg deltar i aktiviteter (f.eks. sport, musikk, klubber, organisasjonsarbeid osv.)
c. Jeg bruker datamaskin til andre ting enn skolearbeid (f.eks. sende meldinger, e-post, spill, musikk osv.)
d. Jeg er sammen med venner
e. Jeg arbeider i en betalt jobb
f. Jeg går på kino eller ser på TV

Tabell 9.5 og figur 9.7 viser resultatene av tonivåanalysene for elevenes tidsbruk utenom skoletiden. På elevnivå har tiden elevene bruker på *skolearbeid* generelt eller på *datamaskin* uten relevans for skolearbeidet, ingen signifikant sammenheng med elevenes prestasjoner. Til gjengjeld har de fire andre spørsmålene en signifikant *negativ* sammenheng med prestasjonene på elevnivå. Korrelasjonskoeffisientene varierer fra å være ganske liten når det gjelder *aktiviteter* som sport, musikk med mer med *r* = –0,08, mens for tid brukt på *venner* er den *r* = –0,18 og for tid brukt på *betalt jobb* er den *r* = –0,19.

Tabell 9.5 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå (Innen klasser) og på klassenivå (Mellom klasser) av hvor mye tid som blir brukt på aktiviteter utenom skoletiden på en vanlig skoledag i forhold til elevenes skår på matematikktesten. Signifikante t-verdier på 0,05-nivå er merket med stjerne (*), og signifikante verdier er gulmerket.

	Variabel-navn	Innen klasser		Mellom klasser	
		r	*t*	*r*	*t*
12a Skolearbeid	STSW	0,02	0,57	0,22	1,48
12b Aktiviteter	STAC	–0,08	–3,52*	–0,17	–0,96
12c Datamaskin, ikke skolerelatert	STUC	–0,01	–0,27	–0,10	–0,66
12d Venner	STFR	–0,18	–7,81*	–0,47	–3,11*
12e Betalt jobb	STPJ	–0,19	–8,19*	–0,45	–2,91*
12f Kino/TV	STTV	–0,11	–4,79*	–0,38	–1,78



Figur 9.7 Resultatene av tonivåanalyser på elevnivå og klassenivå av hvor mye tid som blir brukt på aktiviteter utenom skoletiden på en vanlig skoledag i forhold til elevenes skår på matematikktesten.

På klassenivå er det bare to av faktorene som har en negativ og signifikant sammenheng med elevenes prestasjoner; det er tid brukt på *venner* og tid brukt på *betalt jobb* med korrelasjonskoeffisienter på henholdsvis $r = -0{,}47$ og $r = -0{,}45$. Når analysene justeres for elevenes sosiale bakgrunn, er resultatene tilnærmet de samme både på elevnivå og klassenivå, bortsett fra at korrelasjonskoeffisienten for betalt jobb endrer seg til $r = -0{,}36$. Korrelasjonene på både elev- og klassenivå for disse spørsmålene er fortsatt signifikante.

Når det gjelder faktoren tid brukt på *betalt jobb*, er det interessant at Norge utmerker seg som det landet hvor elevene bruker mest tid på dette utenom skolen, se figur 7.4. Årsaken til at betalt jobb er mer utbredt i Norge enn i andre land kan det være interessant å reflektere over, spesielt når det ser ut til at denne faktoren har en negativ sammenheng på både elevnivå og klassenivå med elevenes prestasjoner i matematikk. Kan dette skyldes at det å skaffe seg materielle ting har blitt svært viktig i Norge, eller kan det ha sammenheng med at det er lettere å få jobb i Norge sammenliknet med andre land som har større arbeidsledighet? Det er også interessant å merke seg fra kapittel 7 at italienske og slovenske elever skårer høyt på testen og bruker mye tid på skolearbeid utenom skoletiden.

9.6 Oppsummerende kommentarer

Løsing av oppgaver har en framtredende plass som en viktig metode for å lære matematikk i de fleste land, og mengden av oppgaver elevene løser viser en positiv korrelasjon med prestasjoner på klassenivå i Norge. Særlig høy er korrelasjonen mellom norske klassers prestasjonsnivå og hvor mye oppgaver elevene løser som lekser. At korrelasjonen mellom prestasjoner og mengden av oppgaveløsing er markert høyere for løsing av oppgaver som lekser enn i timene på skolen, understreker viktigheten av lekser og av at elevene arbeider med oppgaveløsing også utenom skoletimene.

Varierte metoder og diskusjon i klassen. Noe som framstår som problematisk i matematikkundervisningen i Norge i forhold til i andre land, er den ensidige vektleggingen av individuelle arbeidsformer, spesielt oppgaveløsing i undervisningstiden på skolen. Andre land som presterer bedre enn oss synes å anvende mer varierte undervisningsmetoder, hvor de i tillegg til oppgaveløsing også legger vekt på metoder som diskusjon og argumentasjon rundt strategier og resonnementer. Tonivåanalysene av de norske dataene når det gjelder bruk av undervisningsmetoder, viser en relativt høy positiv korrelasjon mellom matematikkskår og at det i klassen legges opp til slike diskuterende og argumenterende metoder. Både et internasjonalt og et nasjonalt perspektiv tyder på at det i Norge er behov for mer vekt på kollektive arbeidsformer som diskusjon og argumentasjon i klassene, og ikke ensidig bruk av individuell oppgaveløsing.

Klasserommet som en felles læringsarena. At analysene indikerer at det er ønskelig med mer bruk av diskuterende og argumenterende arbeidsmåter i norske klasserom, peker på betydningen av klasserommet som en viktig felles læringsarena. Ren oppgaveløsing vil ofte være sterkt individuelt preget, mens diskusjon og argumentasjon vanskelig kan tenkes uten at det foregår som en felles aktivitet. Dette reiser problemstillingen om hvordan man kan finne en god balanse mellom individuelle arbeidsformer og kollektive – individuell læring versus kollektiv læring i klassen. Tidligere klasseromsforskning på matematikkundervisning på ungdomstrinnet i Norge har konkludert med at det synes å være en ensidig vekt på individuelle arbeidsformer, som at elevene løser oppgaver hver for seg, og med en tilsvarende nedtoning av en felles læringsarena som klassen (Bergem, 2009; Klette 2003; Klette et al. 2008). Våre analyser av data fra TIMSS Advanced reiser dette som en aktuell problemstilling også for videregående skole.

Lekser viser positiv sammenheng med klasseprestasjoner. Hvor mye lekser elevene får, og i enda større grad mengden av oppgaveløsing elevene gjør som lekser, viser en tydelig positiv sammenheng med hvor godt klassene presterer. Dette kan tas som en indikasjon på at det er viktig at læreren gir klassen lekser av et visst omfang, og at det særlig er det å få elevene til å løse mange oppgaver utenom matematikktimene på skolen som har betydning for hvor godt klassen presterer. Ser vi dette i sammenheng med diskusjonen i punktet over, synes det å være grunnlag for å si at for å bedre resultatene på klassenivå i Norge kan en vei å gå være at individuelt arbeid som oppgaveløsing i større grad er noe elevene gjør som lekser, mens timene på skolen i større grad kan vektlegge mer kollektive arbeidsformer som går på diskusjon og argumentasjon av strategier og resonnementer, og på gjennomgang av lekser.

Lærerens sentrale rolle. Lærerens rolle som leder i klassen synes å framstå som en avgjørende faktor basert på de analysene som er gjennomført. Det er på klassenivå mange av faktorene viser den klareste positive sammenhengen med prestasjoner, og det er særlig bruk av undervisningsmetoder og omfang av og innhold i lekser som har høyest korrelasjoner med elevprestasjoner. Dette er faktorer som det er rimelig å anta at læreren har den største innvirkningen på, samtidig som man må være klar over at den enkelte lærer selvsagt opererer innenfor visse rammebetingelser. For eksempel vil både læreplaner og i enda større grad eksamen utvilsomt ha en viktig innflytelse på opplegg og på hvor lett det er å motivere elevene for ulike måter å arbeide på. En nærliggende konklusjon er at lærere som gir elevene tidkrevende lekser med løsing av oppgaver utenom timene, og med varierte undervisningsmetoder som går på både oppgaveløsing og diskusjon og argumentasjon i klassen, stimulerer til bedre faglige prestasjoner. At læreren kanskje er den viktigste faktoren når det gjelder hvor mye elevene lærer, understrekes i metaanalyser av et utall av studier om læringseffekter (Hattie, 2009). Nordiske forskere har pekt på det samme (Nordenbo et al., 2008).

Mye betalt arbeid korrelerer negativt med klasseprestasjoner. Mye tid til betalt arbeid og venner korrelerer negativt med faglige resultater i en klasse. At Norge utmerker seg som det av samtlige deltakerland i TIMSS Advanced der den største andelen av elevene bruker mye tid på betalt arbeid, er i denne sammenheng tankevekkende. I land som presterer bedre enn Norge, for eksempel Slovenia, bruker elevene langt mer tid utenom skolen på skolearbeid. Den norske rapporten i fysikk fra TIMSS Advanced peker også på at mye tid brukt til betalt arbeid eller venner henger sammen med svakere faglige prestasjoner (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

Bruken av flernivåanalyser på elevnivå og klassenivå kan bidra både til utdypende og delvis til korrigerende konklusjoner om hvilke faktorer som påvirker elevers faglige prestasjoner. De norske resultatene som er presentert og drøftet i dette kapittelet når det gjelder hvilke faktorer som korrelerer positivt med faglige prestasjoner, samsvarer godt med annen forskning. Det gjelder både teoretisk forskning på hvordan man utvikler matematisk kompetanse (se kapittel 2), og tidligere empiriske studier som for eksempel TIMSS og PISA. Vi henviser til kapittel 11, hvor resultatene fra alle kapitlene i boka settes inn i en bredere skolekontekst og drøftes i et forskningsperspektiv.

10 Elevenes holdninger til matematikk og planer for videre studier

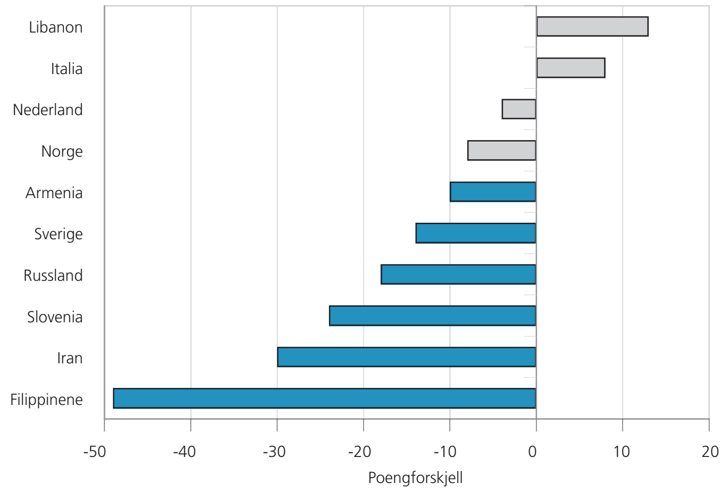
Hovedforfatter: Ida Friestad Pedersen

Tidligere rapporter fra TIMSS- og PISA-undersøkelser har vist en positiv korrelasjon mellom elevers holdninger til matematikk, deres selvoppfatning i faget og deres matematikkprestasjoner, se for eksempel Grønmo et al. (2004) og Kjærnsli et al. (2004). Forholdet mellom holdninger, selvoppfatning og prestasjoner i et fag krever en relativt kompleks analyse (Grønmo et al., 2004). I TIMSS Advanced stilles det ikke spørsmål til elevene av typen: «Hvor godt liker du matematikk?» Søkelyset settes på hvorfor elevene har valgt å fordype seg i matematikk og hvilke planer de har for videre studier. Elevenes holdninger til faget og deres faglige selvtillit måles derfor ikke på samme måte som det har vært gjort i tidligere studier i grunnskolen, men vi får et innblikk i dette basert på elevenes begrunnelser for valg av fag og eventuelle videre studieplaner.

Dette kapittelet tar for seg spørsmål knyttet til andelen elever som har valgt å fordype seg i matematikk, deres begrunnelser for dette valget og deres planer for videre studier. Vi diskuterer også kjønnsforskjeller der det er relevant, og begynner derfor med en kort diskusjon av eventuelle kjønnsforskjeller i 3MX-elevenes matematikkprestasjoner.

10.1 Kjønnsforskjeller i matematikk i TIMSS Advanced

Figur 10.1 viser forskjellene mellom jenters og gutters gjennomsnittlige matematikkprestasjoner for alle landene som deltok i TIMSS Advanced. Norge er ett av fire land hvor man ikke finner signifikante kjønnsforskjeller. I gjennomsnitt får de norske guttene 8 poeng mer enn jentene på skalaen som er standardisert til 500 og har et standardavvik på 100, men dette er for lite til å være statistisk signifikant.



Figur 10.1 Kjønnsforskjeller i matematikkprestasjoner i TIMSS Advanced for alle deltakende land. Positive verdier er i jentenes favør. Blå farge viser at forskjellen er signifikant.

Nærmere undersøkelser viser at det heller ikke er signifikante forskjeller i prestasjoner mellom de norske jentene og guttene hvis man ser på innholdskategoriene Algebra, Kalkulus og Geometri hver for seg (Mullis et al., 2009). Rammeverket til TIMSS Advanced inneholder, i tillegg til innholdskategoriene, en beskrivelse av tre *kognitive kategorier*: Kunne, Anvende og Resonnere (se kapittel 12 for en beskrivelse av de kognitive kategoriene). De norske guttene gjorde det signifikant bedre enn jentene på området Resonnere, mens det ikke var noen kjønnsforskjell i de norske elevenes prestasjoner på de andre to kognitive kategoriene (ibid.). Hvis vi går tilbake til studien som ble gjennomført i 1998, ser vi at de norske guttene da presterte noe bedre enn de norske jentene, at denne forskjellen var statistisk signifikant, men at kjønnsforskjellene i Norge ikke var store sett i et internasjonalt perspektiv (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999).

Også i den norske grunnskolen er det små kjønnsforskjeller når det gjelder prestasjoner i matematikk. I TIMSS 2007 fant man ingen signifikante kjønnsforskjeller på 8. trinn, mens det var en signifikant, om enn relativt liten, kjønnsforskjell i guttenes favør på 4. trinn (Grønmo & Onstad, 2009). Resultatet fra TIMSS Advanced stemmer dermed overens med konklusjoner fra tidligere forskning, nemlig at det er en tendens til at gutter i Norge gjør det litt bedre enn jenter i matematikk på de laveste trinnene i skolen, men at denne forskjellen jevner seg ut på ungdomstrinnet (Grønmo, 2000). En mulig forklaring på dette kan være at guttekulturen er mer preget av bruk av kvantitative begreper som også kan anvendes i matematikk. Gutter er ofte mer konkurranseorienterte. Begreper som er viktige i den tidlige matematikkopplæringen – som for eksempel større, mindre, lengst, først og hvilket nummer man blir i en tevling – antas derfor å være noe guttene lærer i større grad enn jentene i de tidlige leveårene. Det kan bidra til å gi guttene et lite forsprang i matematikk i de første skoleårene. Det er neppe grunn til bekymring siden denne forskjellen ser ut til å jevne seg ut på høyere trinn i skolen (Grønmo, 2000). Om man igjen finner tendenser til større kjønnsforskjeller i prestasjoner på høyere nivåer i utdanningssystemet, kan det derimot være grunn til bekymring. I de fleste andre fag i både grunn- og videregående skole oppnår jentene bedre resultater enn guttene (Utdanningsdirektoratet, 2009).

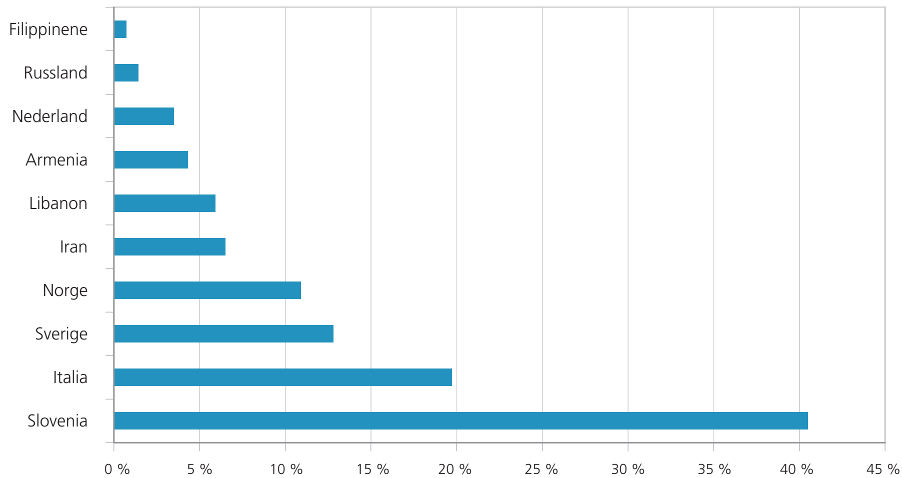
10.2 Valg av realfaglig fordypning

Norsk næringsliv og høyere utdanningsinstitusjoner uttrykker bekymring over at for få elever velger fordypning i matematikk og andre realfag i den videregående skolen. Myndighetene har i samarbeid med næringslivet iverksatt tiltak for å få flere jenter til å velge realfaglig fordypning i skolen.

Figur 10.2 viser hvor stor andel av årskullet som har valgt å ta matematikk på høyeste nivå i videregående skole for alle landene i TIMSS Advanced-studien. Det er dette vi noen ganger kaller *dekningsgrad*. Slovenia skiller seg ut ved at over 40 % av årskullet er definert som matematikkspesialister. Det er da verdt å merke seg at videregående skole i Slovenia, som i Norge, består av to typer programmer: gymnasium (studieforberedende) og yrkesfag. Forskjellen er at alle elevene i det slovenske gymnasiet tar de samme matematikkursene, slik at for Slovenia er samtlige elever i siste år på gymnasiet definert som matematikkspesialister i denne studien (Mullis et al., 2009).

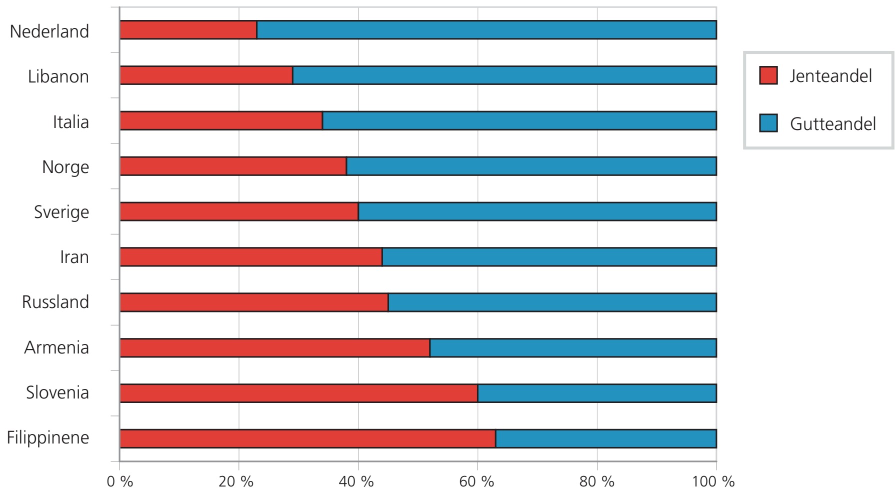
Italia, Sverige og Norge følger etter Slovenia med henholdsvis 20, 13 og 11 % av årskullet som fordyper seg i matematikk. I den motsatte enden peker Filippinene, Russland, Nederland og Armenia seg ut ved at en svært liten andel av årskullet (mindre enn 5 %) har valgt eller fått anledning til å ta matematikk på høyeste nivå. Spesielt framstår matematikkfaget i Russland og Nederland som elitistisk, der svært få – men høytpresterende – elever tar matematikk på høyeste nivå i videregående skole. I Slovenia framstår derimot skolens mest avanserte matematikkfag som viktig for elever i sin alminnelighet.

Disse kommentarene innebærer at vi må regne med at hva som er definert som den populasjonen som skal testes i TIMSS Advanced, vil variere mellom land. Et land med lav dekningsgrad i TIMSS Advanced kan godt tenkes å ha et matematikkurs som er «ganske avansert» og som mange elever tar, mens det bare er det mest avanserte kurset som deltar i TIMSS Advanced. Det fører til at landet får en lav dekningsgrad, og at det kurset som testes kan ha et nokså elitistisk preg. Men landet kan samtidig gi en stor andel av de øvrige elevene en solid matematikkompetanse.



Figur 10.2 Prosentandelen av årskullet som tar full fordypning i matematikk på siste trinn i videregående skole.

Vi har sett at det ikke er signifikante forskjeller mellom matematikkprestasjonene til norske jenter og gutter. Når det gjelder valg av matematikk som fordypningsfag er imidlertid bildet et annet, i 3MX er 38 % av elevene jenter og 62 % er gutter. Det samme bildet viste seg også for ti år siden, i 1998-studien var jenteandelen i 3MX 34 % (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999).



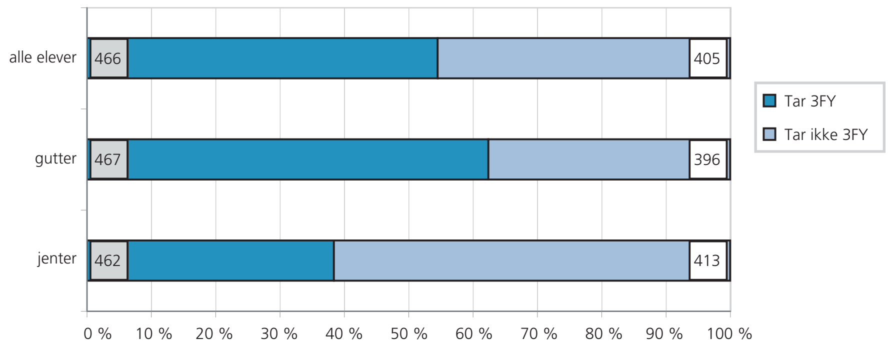
Figur 10.3 Prosentandelen av matematikkelevene i TIMSS Advanced som er jenter og gutter.

Figur 10.3 viser jente- og gutteandelen blant elevene med fordypning i matematikk i alle deltakerlandene. I Nederland er det mindre enn en firedel av matematikkspesialistene som er jenter. I Italia, Norge og Sverige er jenteandelen over en tredel. Av referanselandene er det bare Slovenia som har et flertall med jenter[5]. Det kan kanskje se ut som om matematikk i mindre grad appellerer til jenter i vesteuropeiske land enn i andre deler av verden. Men det kan også være tradisjoner og kulturelle holdninger som påvirker i hvilken grad jenter og gutter oppmuntres til og gis adgang til å velge teoretiske fag i utdanningen.

Hvis vi sammenlikner figur 10.3 med figur 10.1, finner vi ingen tydelig sammenheng mellom kjønnsforskjeller i prestasjoner og i deltakelse. De libanesiske jentene presterer faktisk bedre enn guttene, og i Nederland, Italia og Norge er det ingen signifikante forskjeller mellom jentenes og guttenes prestasjoner. Det er kanskje heller slik at den lave jenteandelen blant matematikkspesialistene (i land som Norge, Nederland og Italia) skyldes forskjeller i guttenes favør når det gjelder holdninger og selvtillit i faget (Grønmo & Onstad, 2009; Kjærnsli et al., 2004), og ikke kjønnsforskjeller i prestasjoner.

5 I Slovenia er som nevnt alle elever i det siste året på gymnasiet definert som matematikkspesialister i denne studien. For Slovenia viser dermed figur 10.3 jenteandelen blant elevene i det siste året på gymnasiet.

Elevene som velger 3MX kan i tillegg ha valgt å fordype seg i andre realfag. I denne studien ble matematikkelevene spurt om de også tok faget fysikk, og som figur 10.4 viser, er det litt over halvparten av 3MX-elevene som også tar 3FY.

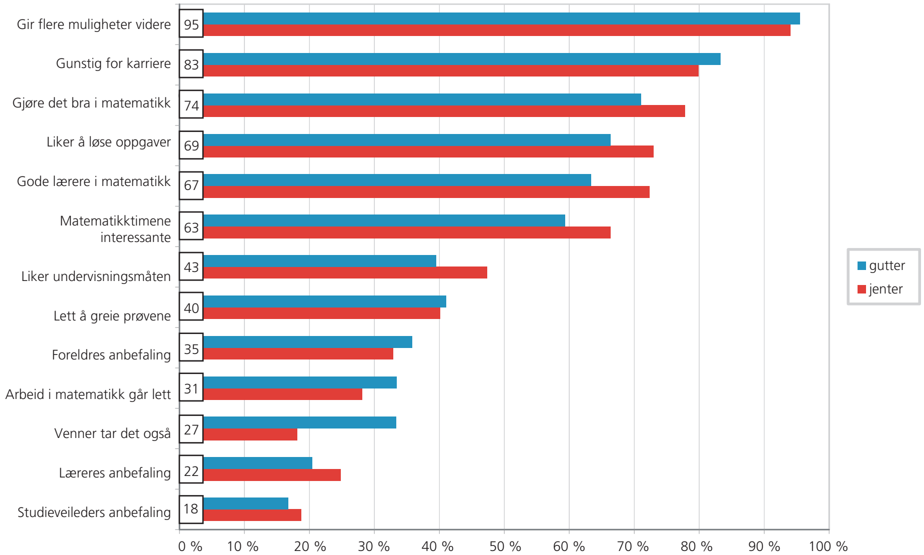


Figur 10.4 Prosentandelen av henholdsvis alle 3MX-elevene, av guttene, og av jentene som også tar faget 3FY. Tallene i rammer er gjennomsnittlig matematikkskår for elever som henholdsvis tar og ikke tar fysikk.

Vi ser at nesten to tredeler av guttene i 3MX også har valgt 3FY, mens dette bare gjelder for en drøy tredel av jentene. For de norske elevene peker altså fysikk seg ut som et guttefag i enda større grad enn matematikk gjør. Elevene som også har valgt 3FY presterer dessuten langt bedre på matematikkdelen i TIMSS Advanced enn 3MX-elevene uten 3FY ved siden av gjør, og det gjelder både for guttene og for jentene. Det er naturlig å tolke dette som at de elevene som ikke føler seg sikre på matematikken i liten grad velger å fordype seg i fysikk i tillegg.

10.3 Elevenes begrunnelser for å velge fordypning i matematikk

I den norske videregående skolen har elevene stor frihet til å velge ulike fagkombinasjoner. (Denne friheten er riktignok noe innskrenket under Kunnskapsløftet i forhold til Reform 94.) Figur 10.2 viste at kun 11 % av det årskullet som gikk ut av videregående skole i 2008 hadde valgt matematikk 3MX. Med tanke på mulighetene for økt rekruttering til matematikk i videregående skole er det interessant å se på hva elevene i 3MX oppgir som viktig for deres valg av faget. Elevene ble bedt om å ta stilling til en rekke utsagn som beskriver ulike grunner for å velge fordypning i matematikk, og for hver grunn skulle de angi om denne hadde vært «Veldig viktig», «Viktig», «Uviktig» eller «Veldig uviktig» for dem. Figur 10.5 viser elevenes svar på disse spørsmålene.



Figur 10.5 Prosentandelene av gutter (blått) og jenter (rødt) i 3MX som oppgir at de ulike grunnene har vært «Veldig viktig» eller «Viktig» for deres valg av matematikk. Tallene i rammer er prosentandelen norske elever som oppgir at de ulike grunnene har vært «Veldig viktig» eller «Viktig» hvis vi ikke skiller mellom gutter og jenter.

Som vi ser, er de to grunnene som flest elever angir som viktige, at matematikk vil gi dem flere valgmuligheter etter videregående skole og at faget er viktig for å kunne få det yrket de ønsker. Lavest ligger anbefalinger fra studieveileder og lærere på skolen. Dette resultatet er tankevekkende når man tar i betraktning den store vekten som ofte legges på å øke innsatsen for bedre veiledning i skolen som en god måte å øke rekrutteringen til realfag på. Man kan si at dette viser at det er behov for en kraftig forbedring av kvaliteten på denne veiledningen for at den skal oppleves som relevant av disse elevene.

Flere forskere har i den senere tid sett på faktorer som kan spille inn når elever velger fordypningsfag. I en kvalitativ studie (fokusgrupper) av elevers valg og bortvalg av realfag i videregående skole beskrev Inge Ramberg (2006) tre hovedkategorier av fagvalg: Når elever har bestemte utdannings- og yrkesplaner, og de velger eller velger bort realfag på bakgrunn av disse planene, gjør de et *profesjonsorientert fagvalg*. Slike fagvalg kan begrunnes med å vise til opptakskrav på bestemte studier. Når elever i TIMSS Advanced sier seg enige i at «Jeg trenger dette kurset for å få den yrkeskarrieren jeg ønsker meg», synes denne begrunnelsen å passe inn i kategorien profesjonsorientert fagvalg. Neste kategori, det *helgarderte fagvalget*, opptrer ofte blant elever som ennå ikke har bestemt seg for hva de vil bli, og som velger realfag fordi de ønsker å holde mange muligheter åpne for opptak til studier og videre yrkesliv. Ramberg bemerker at en betydelig andel av elevene som velger realfag i hans utvalg kommer med slike begrunnelser, og dette støttes av at flesteparten (95 %) av elevene som deltok i TIMSS Advanced oppga at «Å ta fordypning i matematikk gir meg flere muligheter etter videregående skole» var en viktig grunn for deres valg av 3MX. Hvis elevene derimot velger fordypningsfag ut fra faglige interesser, kan de sies å ha foretatt et *interessebasert fagvalg*. Elever som begrunner valg av realfag med å vise til interesse for fagene har som oftest gode erfaringer med realfag fra tidligere skolegang og høy faglig selvtillit (Ramberg, 2006).

Som figur 10.5 viser, ligger tro på egen mestring («Jeg gjør det vanligvis bra i matematikk») og et positivt syn på matematikk og matematikkundervisning («Jeg liker å løse matematiske problemer», «Matematikktimer er interessante») også høyt på lista over begrunnelsene 3MX-elevene oppgir for å velge faget. Elevene som sier seg enige i dette, synes å ha gjort et interessebasert fagvalg (ibid.). Videre kan vi se at selv om jentene og guttene stort sett er enige om hvilke grunner som har vært viktige for deres valg av fordypning i matematikk, synes mestringsforventning og et positivt syn på matematikkfaget å være noe viktigere for jentene enn for guttene. Dette kan knyttes til Rambergs studie, der flere elever kom med utsagn som ble tolket som at jentene ofte setter høyere faglige krav til seg selv enn guttene gjør når de tar avgjørelsen om de skal fortsette med realfag eller ikke (ibid.). Figur 10.5 viser videre at guttene legger betraktelig mer vekt på at venner også tar kurset enn det jentene gjør, og at en relativt stor del av elevene (noe flere jenter enn gutter) har lagt vekt på at «Det er gode lærere i matematikk». Lærerens betydning ble også vektlagt i samtlige av fokusgruppene i Rambergs studie (ibid.). Dette kan være et signal om at en måte å sørge for rekruttering til fordypning i matematikk på, er å utdanne gode matematikklærere. Ikke minst er dette viktig på bakgrunn av den høye alderen som kjennetegner de norske lærerne i 3MX i dag.

Til slutt kan det være interessant å se på sammenhenger mellom de norske 3MX-elevenes begrunnelser for valg av matematikk og deres matematikkprestasjoner. Dette presenteres i tabell 10.1. Det er positiv korrelasjon mellom elevenes matematikkprestasjoner og begrunnelser som «Gjør det bra i matematikk», «Liker å løse oppgaver», «Arbeid i matematikk går lett» og «Matematikktimene interessante», noe som betyr at enighet med disse påstandene generelt henger sammen med høyere matematikkskår. Motsatt er det negativ korrelasjon mellom elevenes matematikkprestasjoner og begrunnelser som «Studieveileders anbefaling», «Foreldres anbefaling» og «Venner tar det også», slik at enighet med disse påstandene generelt henger sammen med lavere matematikkskår. Vi må imidlertid være klar over at flere av disse korrelasjonene er relativt små.

Tabell 10.1 Korrelasjon mellom ulike begrunnelser for å velge fordypning i matematikk og matematikkskår. I tabellen er bare variabler der korrelasjonskoeffisienten i tallverdi er større enn 0,1 tatt med. Alle korrelasjonene er statistisk signifikante.

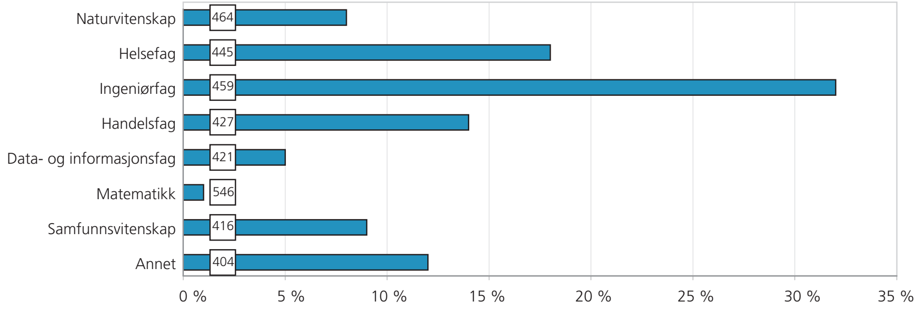
Begrunnelse for valg av matematikk	Korrelasjon med skår
Gjør det bra i matematikk	0,37
Liker å løse oppgaver	0,33
Arbeid i matematikk går lett	0,25
Matematikktimene er interessante	0,22
Gunstig for karriere	0,11
Venner tar det også	–0,12
Foreldres anbefaling	–0,14
Studieveileders anbefaling	–0,16

At faglig mestring og trivsel (de fire første faktorene i tabell 10.1) korrelerer positivt med faglige prestasjoner, overrasker ikke. Dette er grunnleggende faktorer for elevenes faglige utvikling og for deres valg av faglig fordypning. Flere undersøkelser har vist at elevenes valg mellom teoretisk og praktisk matematikk i det første året på videregående skole er sterkt korrelert med tidligere matematikkprestasjoner (Hægeland, Kirkebøen & Raaum, 2005; Bonesrønning, 2009; Steffensen & Ziade, 2009). Bonesrønning (2009) påviser også at jenter som valgte 1MX og 3MX i videregående skole, jevnt over hadde et høyere karakternivå enn gutter som gjorde de samme kursvalgene. Det kan derfor se ut til at et av de beste tiltakene for å styrke rekrutteringen til matematikk i videregående skole er å forbedre matematikkundervisningen i grunnskolen.

10.4 Studieønsker for 3MX-elevene

Norge har over en lang periode opplevd en dramatisk nedgang i søkningen til realfag og teknologiske studier, og at samfunnets og arbeidslivets behov for kompetanse i realfag ikke blir dekket (KD, 2006b). Det forventes at behovet for realfagutdannede på høyt nivå vil fortsette å øke mot år 2025 (Bjørnstad et al., 2008). Å sikre rekrutteringen til realfaglige studier er følgelig viktig, men det kan bli en stor utfordring. I Kunnskapsdepartementets strategiplan *Et felles løft for realfagene* ble det slått fast at søkningen til realfaglige studier ved universiteter og høgskoler ikke er tilfredsstillende, eksemplifisert ved at det fra 2004 til 2005 var en tilbakegang i søkningen på 16,6 % (KD, 2006b). Utviklingen i søkningen til realfag og teknologiske fag i perioden 2005–2009 viser derimot en økning på 12 % til realfagene og hele 30 % økning til teknologiutdanninger i følge den nye strategiplanen *Realfag for framtida* (KD, 2010). Hva kan så TIMSS Advanced fortelle oss om 3MX-elevenes utdannings- og yrkesplaner?

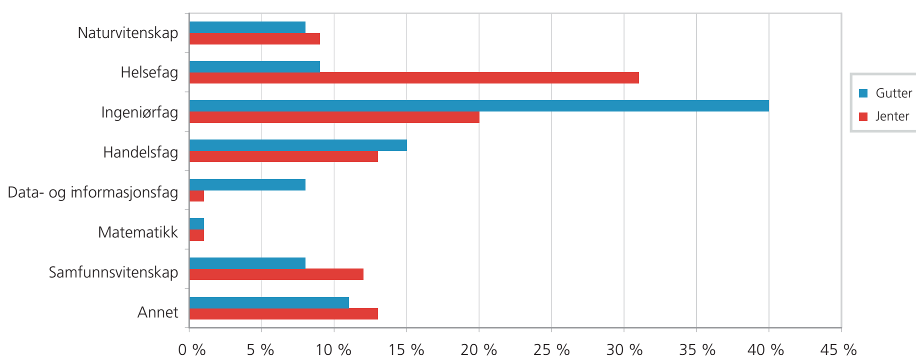
Hele 99 % av 3MX-elevene har planer om å ta høyere utdanning. Figur 10.6 viser deres studieønsker. Det er bare 1 % av elevene som har tenkt å ta videre studier i matematikk, mens 8 % ønsker å studere naturvitenskap (biologi, kjemi, fysikk, geologi). Nesten en tredel av elevene (32 %) ønsker å studere ingeniørfag, noe som gjør dette til det mest populære studieønsket for 3MX-elevene. Helsefag er også populære, 18 % av elevene oppgir at de tenker seg et helsefaglig studium. Det er også interessant å merke seg at nesten 10 % av 3MX-elevene ønsker å studere samfunnsvitenskap.



Figur 10.6 Prosentandelen av 3MX-elever i Norge som oppgir at de tar sikte på videre utdanning innen ulike områder. Tallene i boksene viser elevenes gjennomsnittlige skår for hvert utdanningsvalg.

Vi ser at elevgruppa som sikter på videre studier i matematikk ikke overraskende har en langt høyere gjennomsnittsskår enn de andre elevene. I tillegg skårer gruppene av elever som sikter mot naturvitenskapelige studier, ingeniørfag og helsefaglige studier bedre enn de som sikter mot handelsfag, IKT, samfunnsvitenskap og andre studier.

Figur 10.7 viser 3MX-elevenes studieønsker fordelt på kjønn. Vi ser at jentene og guttene til en viss grad har ulike preferanser. De to mest populære studiene, ingeniør- og helsefag, markerer seg som klare gutte- og jentefag. I samtlige deltakerland er andelen gutter som ønsker å studere ingeniørfag signifikant større enn jenteandelen, og dette gjenspeiles også i Norge der 40 % av guttene og 20 % av jentene ønsker seg en slik utdanning. Motsatt er det vel 30 % av de norske jentene som sikter mot et helsefaglig studium, mens bare 9 % av guttene oppgir det samme, og et liknende bilde viser seg også i Italia, Nederland og Sverige (Mullis et al., 2009).



Figur 10.7 Prosentandelene av gutter (blått) og jenter (rødt) i 3MX som oppgir at de tar sikte på videre utdanning innen ulike områder.

Dette bildet stemmer med situasjonen innenfor mange høyere studier. Andelen jenter som tar medisin, miljøfag og biologi er høy, mens den er svært lav innenfor mange ingeniørfag og fysikk (Schreiner & Sjøberg, 2005). Videre stemmer 3MX-elevenes yrkesplaner godt overens med noen av delresultatene fra ROSE-prosjektet, der det viste seg at norske 15-åringers framtidige yrkesønsker bærer et mønster av stereotype jente- og gutteroller. I ROSE-prosjektet viste det seg at jentene i betydelig større grad enn guttene ønsket å «arbeide med og hjelpe mennesker» og «jobbe med dyr framfor ting», mens guttene i mye større grad enn jentene ønsket å «jobbe med teknologi» (Schreiner & Sjøberg, 2006). Tilsvarende resultater er funnet i tidligere undersøkelser, se Edvardsen (1995).

Elevene som deltok i ROSE-undersøkelsen gikk siste året på ungdomsskolen. I det utvalget var det altså både elever som kom til å ta en yrkesfaglig utdanning og elever som kom til å ta allmennfaglig (nå studiespesialiserende) studieretning i videregående skole, med eller uten realfag. 3MX-elevene i TIMSS Advanced representerer derimot elever som har valgt full fordypning i matematikk (og i mange tilfeller også full fordypning i fysikk). Likevel finner vi tilsvarende kjønnsforskjeller med hensyn til studie- og yrkesvalg i TIMSS Advanced som i ROSE. Det er slående hvor tradisjonelt norske gutter og jenter synes å tenke når det gjelder valg av yrke.

10.5 Avsluttende kommentarer

Som nevnt i ingressen til dette kapittelet er det et komplisert forhold mellom holdninger, selvoppfatning og prestasjoner i et fag, slik at det er vanskelig å forstå hvordan hver av disse faktorene blir påvirket av de to andre (Grønmo et al., 2004). Basert på noen av resultatene som er diskutert i dette kapittelet kan vi imidlertid si at norske elever som presterer bra på matematikktesten i TIMSS Advanced, kjennetegnes ved å ha en positiv holdning til faget og undervisningen, ved å ha en høy selvoppfatning i faget, og ved å planlegge en realfagrelatert utdanning og et tilsvarende yrke.

Når det gjelder rekruttering til matematikkfaget ønsker vi i denne rapporten å peke på betydningen av at universiteter og høyskoler stiller klare krav til framtidige studenters matematikkbakgrunn. For matematikkrevende studier, som for eksempel økonomifag og ulike typer ingeniørutdanninger, synes sviktende matematikkunnskaper å være en viktig årsak til frafall. Dette vises blant annet i en evaluering av ingeniørutdanningen i Norge, gjennomført av NOKUT (Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen), som påviste et betydelig problem med frafall av studenter. Kun 44 % av studentene som begynte høsten 2003 hadde fått vitnemål per 1. oktober 2006 (NOKUT, 2008). Rapporten trakk fram dårlige kunnskaper i matematikk som en viktig forklaringsfaktor for frafallet, og det ble anbefalt å gjennomgå innholdet i og kravene til matematikk i videregående skole. I tillegg ble det foreslått å heve minimumskravene til matematikkarakterer for opptak til ingeniørstudiet ved enkelte institusjoner. Resultatene fra TIMSS Advanced kan tyde på at en slik heving av kravene til studentenes matematikkbakgrunn kan virke positivt for rekruttering av elever til matematikkfaget i den videregående skolen (se figur 10.5).

Avslutningsvis er det på sin plass å påpeke at det er langt flere faktorer som kan spille inn når elever velger fag i videregående skole enn de vi har diskutert i dette kapittelet; for eksempel kan muligheter for selvrealisering, påvirkning fra rollemodeller eller liknende være avgjørende (Henriksen & Schreiner, 2009). For tida er det flere store norske og internasjonale studier som søker å oppnå en bedre forståelse av hvilke faktorer som er avgjørende for elevers valg av realfag i videregående skole og høyere utdanning, og hvordan jentenes lave deltakelse i realfag kan forstås (se for eksempel *Vilje-con-valg* og *IRIS*, www.naturfagsenteret.no/vilje-con-valg/ og www.fys.uio.no/skolelab/IRIS/).

11 Matematikk i motvind – oppsummering og drøfting av hovedresultater

Hovedforfatter: Liv Sissel Grønmo

I dette kapittelet oppsummerer vi først en del av de viktigste resultatene fra TIMSS Advanced i matematikk og drøfter disse i et mer helhetlig forskningsmessig og skolepolitisk perspektiv. Noen av de viktigste funnene fra TIMSS Advanced i fysikk blir også oppsummert, med særlig vekt på resultater som har relevans for matematikk. Fysikkrapporten peker på elevenes svake kunnskaper i matematikk som en hovedårsak til tilbakegangen i fysikk fra 1995 til 2008 (Lie, Angell & Rohatgi, 2010). Dette eksemplifiserer at matematikk både er et fag i seg selv og samtidig et viktig redskapsfag i andre fag. Både matematikk- og fysikkrapporten trekker inn resultater fra tidligere forskning for å forstå og kunne gi mulige forklaringer på de endringene i elevprestasjoner som er målt i TIMSS Advanced.

Drøftingen er organisert i forhold til de tre nivåene i et utvidet læreplanbegrep: *intendert læreplan* på systemnivå, *implementert læreplan* på skole- og klassenivå, og *resultert læreplan* på elevnivå. I kapittel 2 er det er redegjort for hva som ligger i det utvidete læreplanbegrepet. Drøftingen av resultatene er organisert i omvendt rekkefølge av den som nettopp er angitt. Etter oppsummering av resultatene i matematikk og fysikk kommer en drøfting av den resulterte læreplanen (elevnivået) med vekt på prestasjoner i matematikk både som eget fag og som redskapsfag. Deretter kommer en drøfting av den implementerte læreplanen (skole- og klassenivået) med vekt på undervisningsfaktorer som innhold i og organisering av undervisningen, lærerrollen, bruk av lekser og bruk av hjelpemidler, spesielt kalkulator. Til slutt kommer en drøfting av noen faktorer knyttet til den intenderte læreplanen (systemnivået) som starter med hva som legitimerer fagets plass i skolen, og hvor vi henviser til læreplandokumenter og eksamen som deler av den intenderte læreplanen.

Sverige framstår som et land som har mye til felles med Norge når det gjelder mange av de faktorene som tas opp til drøfting i dette kapittelet. Referanser til de svenske resultatene får derfor en mer framtredende plass enn de andre referanselandene i drøftingene. Hovedfokus er på mulige forklaringer på det svake norske resultatet, og på hvordan man kan møte de utfordringene skolen står overfor. Det blir referert til tidligere TIMSS-studier i matematikk av elever i grunnskolen, slik at resultatene i TIMSS Advanced kan settes inn i en større forskningsmessig og skolepolitisk kontekst.

11.1 Oppsummering av viktige funn i matematikk

Det er en klar tilbakegang i de norske 3MX-elevenes matematikkprestasjoner fra 1998 til 2008. Norske elever presterer svakere enn elever i de fleste andre landene som omfattes av studien. Sverige har et enda svakere resultat. Denne utviklingen i videregående skole samsvarer med resultater fra tidligere TIMSS- og PISA-studier i grunnskolen der elevenes naturfag- og matematikkompetanse er undersøkt (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009; Kjærnsli et al., 2004). Svenske elever i videregående skole har enda større tilbakegang enn de norske, og vel så svake prestasjoner i et internasjonalt perspektiv. Elever i 3MX som også tar 3FY presterer markant bedre enn de som ikke tar fysikk, omtrent ¾ standardavvik. Denne forskjellen er større for guttene enn for jentene.

Bare 1 % av de norske elevene i 3MX når opp til det som defineres som *avansert kompetansenivå* i TIMSS Advanced 2008. Hele 65 % av de norske elevene ligger under det lavest definerte kompetansenivået for studien. (Det laveste nivået som er definert internasjonalt, er *middels kompetansenivå*; prestasjoner som ligger under dette, har vi betegnet som *lavt nivå*.) Fordelingen på kompetansenivåer er ganske lik i Sverige og Norge, med helt lik prosentandel på avansert og høyt nivå. Prosentandelen svenske elever som når opp til middels nivå er 6 prosentpoeng lavere enn i Norge. Fordelingen av norske elever på kompetansenivåer i TIMSS Advanced 2008 samsvarer godt med resultater fra tidligere TIMSS-studier av elever på barne- og ungdomstrinnet, hvor relativt få norske elever på 4. og 8. trinn når de høyeste kompetansenivåene, og en relativ stor andel ligger under lavest definerte nivå (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009).

Å løse oppgaver på egen hånd er en sentral og viktig arbeidsmåte for å lære matematikk. Både i Norge og i andre land har denne måten å arbeide på en framtredende plass i undervisningen. Det framstår likevel som problematisk at det er en *mer ensidig vekt på denne arbeidsmåten i Norge enn i andre land*. Andre viktige arbeidsmåter for å lære matematikk – som argumentasjon og diskusjon av løsninger og strategier – blir mindre brukt i

3MX i Norge enn i tilsvarende kurs i andre land. Analyser viser at klasser i Norge som legger mer vekt på diskusjoner og argumentasjon presterer bedre enn klasser som gjør dette sjeldnere. Arbeidsmetoder som å trene og pugge blir også å bli mindre brukt i Norge enn i de fleste andre land. Disse karakteristiske trekkene for undervisningen i 3MX samsvarer godt med resultater for matematikkundervisningen på barne- og ungdomstrinnet i Norge (ibid.).

Norske 3MX-klasser hvor elevene oftere arbeider med individuell oppgaveløsing presterer bedre enn klasser som gjør dette i mindre grad. Korrelasjonen mellom hvor mye elevene i en klasse løser oppgaver og hvor gode prestasjoner klassen har, er enda sterkere dersom elevene gjør dette som lekser. Omfanget av lekser som gis i Norge er omtrent som i andre land. Det er også en klar tendens til at klasser som gjennomgår lekser hyppigere, presterer bedre enn klasser hvor dette ikke gjøres i samme grad. Den klare sammenhengen mellom hvor godt en klasse presterer, og bruk av varierte undervisningsmetoder og omfang og innhold av lekser peker mot lærerens viktige rolle som faglig og pedagogisk leder i klassen. Det er læreren som i stor grad kan styre dette.

Norske 3MX-elever har avanserte kalkulatorer. Omtrent alle har kalkulator med mulighet for graftegning; nærmere 20 % har kalkulator som også kan regne med symboler. Flere land som presterer godt i matematikk, bruker ikke kalkulator i samme grad som hos oss. I TIMSS Advanced gjelder det for eksempel Slovenia og Italia, i TIMSS i grunnskolen gjelder det for eksempel Japan.

Det er også en tendens til at elever i klasser som presterer godt i matematikk, i mindre grad har betalt arbeid utenom skolen. Dette er en faktor som i stor grad er et valg for den enkelte elev. Sammenhengen mellom betalt arbeid og prestasjoner er grundigere drøftet i fysikkrapporten, da også i relasjon til elevenes hjemmebakgrunn. Der henvises det blant annet til at elever med lav sosial bakgrunn jobber mer ved siden av skolen enn andre elever (Lie, Angell & Rohatgi, 2010), og at et kjennetegn på skoler som presterer godt er at få elever bruker mye tid på betalt jobb ved siden av skolen.

De viktigste grunnene elevene oppgir for å velge 3MX i videregående skole er at det gir dem flere valgmuligheter videre, eller at de trenger det for videre utdanning. Deretter kommer grunner som at de gjør det bra og liker å løse matematikkoppgaver. Norske lærere i 3MX har generelt høy fagkompetanse i matematikk, vel så høy som i andre land. Dette står i klar motsetning til resultatene fra tidligere studier i grunnskolen, hvor norske lærere utmerket seg med lav kompetanse i matematikk (Grønmo & Onstad, 2009). Norske lærere i 3MX har imidlertid høy alder. Over 70 % av lærerne er mer enn 50 år gamle, halvparten av disse er over 60 år.

11.2 Oppsummering av viktige funn i fysikk

Denne oppsummeringen er basert på den norske boka om fysikk i TIMSS Advanced 2008 (Lie, Angell & Rohatgi, 2010). I Norge, og enda mer markant i Sverige, er det en kraftig tilbakegang i elevenes prestasjoner i fysikk sammenliknet med TIMSS 1995. Det er også en nedgang i prosentandelen av årskullet som velger 3FY (dekningsgraden). Prosentandelen av årskullet som når *høyt kompetansenivå* i fysikk er omtrent halvert siden 1995. I fysikk er det, i motsetning til i matematikk, signifikante forskjeller mellom jenter og gutters prestasjoner. Målet i «Et felles løft for realfagene» (KD, 2006b) om at 12 % av årskullet skal velge 3FY og at 40 % av disse skal være jenter, er langt fra nådd. Det er 6,8 % av årskullet som velger 3FY, med en jenteandel på 29 %. På tross av den markante tilbakegangen skårer norske elever godt over det skalerte gjennomsnittet på 500 på fysikktesten. Bare Nederland skårer signifikant høyere, men de nederlandske elevene utgjør en betydelig lavere andel av årskullet enn norske (og svenske) elever.

I fysikkrapporten peker man på at en mulig hovedårsak til den kraftige tilbakegangen i fysikk er å finne i elevenes forutsetninger fra grunnskolen. Det henvises blant annet til den klare tilbakegangen i norske elevers matematikkunnskaper i grunnskolen som er blitt målt i TIMSS og PISA. «Det er åpenbart at matematiske begreper og matematisk innsikt spiller en viktig rolle for å forstå hva fysiske størrelser og lover egentlig innebærer. Abstrahering og manipulering med matematiske formler spiller en stor rolle i framstillingen av fysikkfaget i lærebøkene, og elevenes forståelse prøves i betydelig grad gjennom oppgaver der aritmetisk og algebraisk regneferdighet er avgjørende.» (Lie, Angell & Rohatgi, 2010, s. 211) Det pekes på at for de norske fysikkelevene gjelder det spesielt oppgaver som krever kombinasjoner av og manipulering med formler, men også i en viss grad oppgaver som krever relativt enkel tallregning. «Men også når det gjelder tallregning med brøker, synes elevene å svikte selv på helt enkle beregninger. Uten tvil er de svekkete kunnskapene i matematikk en sterkt medvirkende årsak til de svake resultatene i fysikk. Vi minner om at nedgangen fra 1998 for matematikkens vedkommende i TIMSS Advanced er enda større enn for fysikk.» (Ibid., s. 212)

Fysikkrapporten understreker at mye av det man kan kalle tradisjonell undervisning – som at læreren gjennomgår stoff og elevene jobber hver for seg med oppgaver – har en positiv sammenheng med elevenes faglige prestasjoner. Samtidig etterlyses en noe mer allsidig undervisning, som for eksempel at man også har mer kvalitativ drøfting av faglige fenomener. Det er viktig at en i undervisningen i fysikk framhever både kvantitative og kvalitative aspekter som grunnlag for en god forståelse i faget.

I fysikkrapporten pekes det også på at gjennomgang av lekser har en positiv sammenheng med gode elevprestasjoner i 3FY. Skoler som skårer høyt i fysikk har lærere som bruker tid på gjennomgang av lekser, og de «legger vekt på å gi elevene betydelige utfordringer av typen forklaringer og begrunnelser i sine besvarelser» samtidig som skolekulturen bærer preg av at elevene i liten grad har betalt jobb utenom skolen (ibid., s. 202).

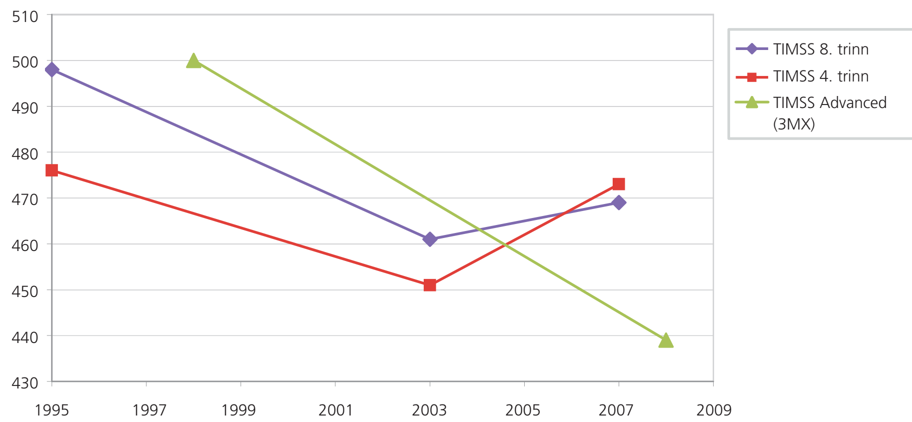
Den økte bruken av kalkulator pekes på som et problem. Det ser ut som om bruken av kalkulator i en periode har fortrengt «den betydningen som tidligere har vært tillagt automatisering av grunnleggende aritmetiske regneferdigheter og algebraisk manipulering. Et stykke på vei er dette i våre dager ment å være rettet opp gjennom den sterke betoning av grunnleggende regneferdigheter på tvers av fag i Kunnskapsløftet.» (Ibid., s. 213) Grunnleggende algebraiske ferdigheter regnes imidlertid ikke som en del av de «grunnleggende» ferdighetene i regning. Konsekvensene av dette kan vise seg å bli betydelige for matematikkfaget i videregående skole. Basert på analyse av elevenes svar på fysikkoppgavene er det frykt for at svake algebraiske ferdigheter vil utgjøre et stort problem for fysikkfaget også i framtiden. Etter Kunnskapsløftet er det fra 2009 innført todelt eksamen i fysikk, én del uten hjelpemidler og én del med alle mulige hjelpemidler. Sett i lys av elevenes svake kunnskaper i enkel regning og algebra, er innføringen av todelt eksamen et positivt tiltak. Det innebærer at elevene i alle fall i noen grad må lære seg noen grunnleggende ferdigheter og at de må kunne beherske matematikken uten å måtte slå opp i medbrakte hjelpemidler til eksamen. Dette kan hjelpe elevene til å fokusere mer på grunnleggende kunnskaper og ferdigheter i faget, og det kan hjelpe dem i deres forståelse av fysikk i vid forstand. Det er selvsagt besnærende at vi med vår moderne teknologi raskt og effektivt kan få svar på mange spørsmål. Men det må ikke forlede oss til å tro at det er det samme som at det ikke er nødvendig å sitte inne med konkrete kunnskaper i egen hukommelse. Det er ikke særlig effektivt «å gå tilbake til start» hver gang vi møter et nytt problem. (Ibid., s. 217)

I fysikk som i matematikk angir elevene som den viktigste grunnen til å velge faget at det gir flere muligheter for yrkesvalg framover, deretter at de finner faget interessant. I fysikk som i matematikk framstår norske lærere på dette nivået som godt kvalifiserte, men de har en høy gjennomsnittalder. Det er bekymringsfullt fra et rekrutteringsperspektiv at norsk skole i tiden framover vil trenge en betydelig tilgang på velutdannede lærere i realfag.

11.3 Resultert læreplan – skole- og klassenivå

11.3.1 Endring i prestasjoner

Endringer i norske elevprestasjoner i matematikk på 4. trinn, 8. trinn og i slutten av videregående skole fra 1995 til 2008 er oppsummert i figur 11.1. Fra 1995 til 2003 utmerket de norske grunnskoleelevene seg med å ha den største tilbakegangen av samtlige land som deltok i studiene på både 4. trinn og 8. trinn (Grønmo et al., 2004). Fra 2003 til 2007 var det en viss framgang i de norske grunnskoleelevenes prestasjoner, særlig på 4. trinn, men fortsatt ligger åttendeklasseelevenes prestasjoner klart under 1995-nivået (Grønmo & Onstad, 2009). I vurderingene av disse resultatene må vi ta med i betraktning at elevene på 4. trinn i både 2003 og 2007 hadde ett år mer formell skolegang enn det de hadde i 1995; i 2007 gjaldt det samme for elevene på 8. trinn. Prestasjoner til norske elever i matematikk i videregående skole har bare blitt målt i 1998 og i 2008.



Figur 11.1 Utvikling av matematikkprestasjoner i Norge på 4. trinn, på 8. trinn og i slutten av videregående skole

Som det framgår av figur 11.1 kan man snakke om en generell tendens til svakere kunnskaper i matematikk hos norske elever fra midten av 1990-tallet og fram til 2008, både i grunnskolen og i videregående skole. Den store, signifikante tilbakegangen i de norske 3MX-elevenes resultater fra 1998 til 2008 er det naturlig å drøfte i lys av utviklingen i prestasjoner også i grunnskolen. De norske matematikkelevene i 3MX ligger klart under internasjonalt standardisert gjennomsnitt på 500, og de presterer generelt svakere enn elever i de fleste andre land. Det samme er bildet av situasjonen for norske elever på 4. trinn og på 8. trinn i grunnskolen. I Sverige er tilbakegangen i matematikkprestasjoner fra 1995 mer markant enn i Norge, både i grunnskolen og i videregående skole. Her må det tas i betraktning at de svenske grunnskoleelevene presterte noe bedre enn de norske i matematikk på 8. trinn i 1995. Mange av resultatene som er presentert i denne boka viser likhetstrekk mellom Norge og Sverige når det gjelder for eksempel undervisningsfaktorer. Å ta dette opp med full tyngde ville gått ut over rammene for denne boka, men vi vil her henvise til Grønmo & Gustafsson (2010) for en mer omfattende analyse av dette.

Det er verdt å merke seg at det årskullet av elever som ble undersøkt i TIMSS på 8. trinn i 2003 er det samme årskullet som ble undersøkt i TIMSS Advanced i 2008. Det er mye som tyder på at en del av endringene i norsk skole fra midten av 1990-tallet har hatt en negativ innvirkning på elevenes faglige prestasjoner i matematikk på alle nivåer. Da trenden snudde noe i positiv retning for grunnskoleelevene i 2007, pekte den norske TIMSS-rapporten på at dette delvis kunne forklares med økt oppmerksomhet og innsats for å forbedre elevenes prestasjoner etter de svake resultatene for norske elever i TIMSS 2003 (Grønmo & Onstad, 2009). Følgende mulige årsaker til framgangen i elevenes resultater i matematikk fra 2003 til 2007 ble nevnt:

- Stor oppmerksomhet på de svake resultatene i både TIMSS og PISA i 2003
- Politisk enighet om økt satsing på kunnskap i skolen
- Økt oppmerksomhet på viktigheten av gode kunnskaper i matematikk
- Innføring av nasjonale prøver med sikte på å øke elevenes kunnskaper
- Økt timetall i matematikk på barnetrinnet
- En viss økning i faglig relevant etterutdanning av lærere
- En viss økning i lærernes oppfølging av lekser

Det har vært mindre oppmerksomhet rettet mot elevenes matematikkunnskaper i videregående skole enn i grunnskolen. Det gode resultatet for de norske fysikkelevene i 1995, som lå helt på topp internasjonalt, kan være noe av årsaken. Mange undersøkelser i grunnskolen, både TIMSS og PISA, men ingen etter 1998 i videregående skole, kan være en annen årsak til lite oppmerksomhet på utviklingen i prestasjoner hos elever på dette nivået. Flinke elever med gode faglige forutsetninger trenger også faglig stimulans for å prestere godt. I den norske TIMSS-rapporten fra studien i 2007 ble dette drøftet blant annet på bakgrunn av at norske elever gjorde det markant dårligere i for eksempel algebra enn elever med samme alder i andre land (Grønmo & Onstad, 2009). Spørsmålet om hva norsk skole gir til de flinke elevene sto sentralt i diskusjonen av resultatene fra TIMSS 2007 (ibid.). Det ble konkludert med at det synes å være lite oppmerksomhet rundt denne gruppen elever. Blant annet den sterke fokuseringen på bruk av regning i dagliglivet, med en tilsvarende nedtoning av algebra, peker i en slik retning. For faglig sterke elever i grunnskolen vil antakelig mer vekt på algebra, som for eksempel likninger, kunne virke positivt og stimulerende for videre læring.

11.3.2 Grunnleggende ferdigheter i matematikk

TIMSS Advanced viser som nevnt en klar nedgang i de norske elevenes fysikkprestasjoner (Lie, Angell & Rohatgi, 2010). Matematikk er både et fag i seg selv og et viktig redskap i fag som fysikk, kjemi, økonomi, informatikk og en rekke teknologiske fag. Resultatene fra TIMSS Advanced i både matematikk og fysikk tyder på at elevene ikke behersker grunnleggende ferdigheter i matematikk. Det gjelder ferdigheter i både tallregning, algebra og grunnleggende analyse (kategorien Kalkulus i TIMSS Advanced). Grunnleggende ferdigheter er noe man trenger for å utvikle seg på alle nivåer og områder i matematikk. På barnetrinnet står for eksempel multiplikasjonstabellen og de fire regningsartene for tall sentralt. På ungdomstrinnet bør grunnleggende ferdigheter også omfatte algebra, som manipulering av bokstavuttrykk og likninger. På videregående skole bør grunnleggende ferdigheter også omfatte derivasjon, grenseverdier og manipulering av mer komplekse algebraiske uttrykk.

Tidligere forskning viser at mange av de problemene elever har i algebra skyldes manglende kunnskaper og ferdigheter i aritmetikk (Brekke, Grønmo & Rosèn, 2000). Resultater fra alle TIMSS-studiene peker på manglende grunnleggende ferdigheter hos norske elever som en årsak til deres svake resultater i matematikk (Grønmo et al., 2004; Grønmo, 2005; Grønmo & Olsen, 2006). Matematikk er et hierarkisk oppbygd fag, slik at manglende kunnskaper på et lavere nivå gjør det vanskelig å gå videre i faget.

Det å lære algoritmer og prosedyrer betraktes av og til som noe som står i motsetning til det å utvikle en dypere begrepsforståelse. Som nevnt i kapittel 2 kan det argumenteres for at dette er en falsk motsetning. Tvert imot kan begrepsforståelse og prosedyreferdigheter sees på som to sentrale komponenter av matematisk kompetanse som er gjensidig avhengige av hverandre (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Ostad, 1992). Automatisering av ferdigheter er ikke et mål i seg selv, men det bidrar både til å frigjøre kognitiv kapasitet slik at man kan håndtere mer komplekse problemer, og til utviklingen av solide begreper (Wu, 1999). I TIMSS Advanced presterer norske elever svakt på oppgaver som krever grunnleggende ferdigheter i for eksempel derivasjon (se oppgave 4 og 5 i kapittel 5) og i algebra (se oppgave 7 i kapittel 4). Tilsvarende presterer de svakt på oppgaver som forutsetter forståelse av grunnleggende begreper som for eksempel stigningstall og parallellitet (se oppgave 7 i kapittel 6) og deriverbarhet (se oppgave 3 i kapittel 5). På samme måte viste oppgavene i fysikk at norske elever presterte svakt på oppgaver som krevde beherskelse av grunnleggende ferdigheter i aritmetikk eller manipulering av algebraiske utrykk (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

Tidligere TIMSS-rapporter så vel som begge rapportene fra TIMSS Advanced 2008 peker på *den ensidige vekten på individuelle arbeidsformer* som en viktig årsak til tilbakegangen fra 1990-tallet. De samme konklusjonene har blitt trukket i tidligere rapporter fra TIMSS i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009). Både matematikkrapporten og fysikkrapporten peker på at det at elevene arbeider med oppgaver viser en positiv sammenheng med hvor godt de presterer, samtidig som begge rapportene også understreker at det er behov for mer variasjon hvor man i tillegg bruker andre arbeidsmåter med faglige diskusjoner og argumentasjon. Det er *ensidigheten* i bruken av arbeidsformer som framstår som problematisk i norsk skole, ikke bruken av mye oppgaveløsing i seg selv. Skal man bedre de norske resultatene i matematikk, kan det være hensiktsmessig å variere klassens arbeidsmåter, med mer bruk av både ferdighetstrening og argumentasjon/diskusjon i klassen. Selv om individuelt arbeid med oppgaver viser en positiv sammenheng på klassenivå med elevprestasjoner, så viste de internasjonale sammenlikningene både i denne studien og i tidligere studier at land som presterer bedre, i større grad varierer undervisningsmetodene. En del av det individuelle arbeidet med oppgaveløsing kan også med fordel gis som lekser, slik at tid frigjøres til mer varierte arbeidsmåter i klassen. For mer om lekser, se delkapittel 11.4.2.

11.3.3 Hva gir skolen til de faglig sterke elevene?

Elevene som har valgt full fordypning i matematikk i videregående skole (3MX) er de elevene som det er mest aktuelt å rekruttere til yrker og profesjoner som trenger en solid faglig basis i matematikk. Det er derfor bekymringsfullt at disse elevene utgjør en relativt liten, og synkende, andel av årskullene i Norge, og at de presterer svakere enn elever med full fordypning i andre land. Enda mer bekymringsfull er den store tilbakegangen i prestasjoner hos disse elevene fra forrige studie. Både matematikk- og fysikkrapporten (Lie, Angell & Rohatgi, 2010) peker på elevenes manglende kunnskaper i matematikk fra grunnskolen som én viktig årsak til den store nedgangen i prestasjoner som er målt i TIMSS Advanced 2008. Med full tyngde reiser dette spørsmålet om hva norsk grunnskole gir i matematikk til de faglig sterke elevene. Imsen (2003a) hevder at vi ikke har tradisjon for å følge opp de mest begavede elevene i Norge. Leter man i pedagogisk litteratur, er det lite å finne om flinke elever. Det er tilfelle, på tross av pene ord om at «Alle elever skal i arbeidet med fagene møte realistiske utfordringer og krav de kan strekke seg mot.» (St.meld. nr. 16, KD, 2006–2007, s. 76)

TIMSS-rapporten 2007 problematiserte og drøftet dette, med særlig vekt på de svake prestasjonene i Algebra på 8. trinn, og i Tall og tallregning på

4. trinn (Grønmo & Onstad, 2009). En ensidig vekt på matematikk i dagliglivet på bekostning av ren matematikk ble framhevet som en mulig årsak til tilbakegangen i matematikk. Andre artikler som analyserer norske elevers prestasjoner i TIMSS og PISA, har pekt på at også de svake resultatene i PISA til en viss grad kan ha sin årsak i at man i grunnskolen legger for liten vekt på grunnleggende ferdigheter i ren matematikk. Elevene vil da mangle de ferdighetene de trenger for eksempel i tallregning for å løse PISA-oppgavene, enda prøvene i PISA legger hovedvekten på anvendelse av faget i en daglignær kontekst (Grønmo & Olsen, 2006; Olsen & Grønmo, 2006). Fysikkrapporten (Lie, Angell & Rohatgi, 2010) peker på noe av det samme, at elevene mangler grunnleggende ferdigheter i både aritmetikk og algebra.

Hvis elevene kommer til videregående skole med svake kunnskaper i matematikk, vil deres muligheter for å tilegne seg mer kunnskap i faget i videregående skole hemmes av deres svake utgangspunkt. I 1995 var det 4 % av de norske elevene som nådde det høyeste kompetansenivået, avansert nivå, etter ett år på ungdomstrinnet. I 2003 og 2007 var det ingen målbar prosent av de norske elevene ved samme alder (gjennomsnittlig 13,8 år) som nådde dette nivået (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009). Tar man i betraktning at i 2007 hadde elevene med samme alder ett år mer med formell skolegang, blir resultatet enda mer tankevekkende. Det ser ut som om man i norsk skole tok bedre vare på de talentfulle elevene fram til 1995, enn det man har gjort senere.

11.4 Implementert læreplan – skole- og klassenivå

11.4.1 Undervisning og undervisningsmetoder

Matematikklærere i den norske videregående skolen har høy fagkompetanse i matematikk. Det står i motsetning til resultater fra tidligere studier i grunnskolen, der de norske lærerne utmerket seg med lav kompetanse i matematikk og matematikkdidaktikk (Grønmo & Onstad, 2009). Det som gir grunn til bekymring, er at disse erfarne og velutdannede lærerne i 3MX har en meget høy alder. Over 70 % av lærerne i 3MX er mer enn 50 år gamle, og halvparten av disse har passert 60, slik at det er et stort behov for å rekruttere godt utdannete lærere i matematikk som kan overta når de som underviser i dag trekker seg tilbake. Problemet er det samme i fysikk.

Det framgår av elevenes og lærernes svar om bruk av arbeidsmåter at trening med sikte på automatisering av ferdigheter er relativt lite brukt i Norge. Dette framstår som problematisk, særlig på lavere trinn i skolen, fordi elevene da ikke tilegner seg viktige strategier for innlæring av nødvendige ferdigheter. Også arbeidsmåter som argumentasjon og diskusjon av løsninger og strategier blir mindre brukt i 3MX i Norge enn i tilsvarende kurs i andre land. Både trening med sikte på automatisering av ferdigheter og diskusjon av strategier og problemløsing framheves i forskning på utvikling av matematisk kompetanse som sentrale for å få en solid matematisk basis og for å danne gode matematiske begreper (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Wu, 1999). Norske 3MX-elever arbeider mye individuelt med oppgaver. Alle disse karakteristiske trekkene ved matematikkundervisning i 3MX samsvarer i stor grad med resultater om undervisning i matematikk på barne- og ungdomstrinnet i Norge. Det er også klare fellestrekk mellom Norge og Sverige når det gjelder bruk av metoder i matematikkundervisningen på alle nivåer i skolen. I begge landene er det mer ensidig vekt på *individuelle arbeidsmåter* som løsing av oppgaver enn det som er vanlig i mange andre land. Dette er tankevekkende, sett i lys av at det er disse to landene som viser størst tilbakegang i prestasjoner fra den forrige studien av matematikkelever i slutten av videregående skole, og at det også i grunnskolen er disse to landene som utmerker seg internasjonalt med størst tilbakegang fra midten av 90-tallet.

Konstruktivismen som den dominerende læringsteorien har ifølge Philips (1995) på en positiv måte bidratt til å gjøre det allment akseptert å gi elevene individuell oppfølging. Men det kan være interessant å se på årsaker til at det har blitt lagt *så stor og til dels ensidig vekt på individualisering* i matematikkundervisningen i Norge (og Sverige) som det vi ser i TIMSS-studiene. En nærliggende årsak i Norge kan være tolkning og implementering av begrepet *tilpasset opplæring*, som har stått sentralt i skoledebatten fra midten av 70-tallet. Jensen og Lillejord (2009) peker på at tilpasset opplæring har blitt tolket på ulike måter i ulike tidsepoker. Epoken fra 1997 til 2005 betegner de med «tilpasset opplæring som individualisering». De understreker: «Klassen som ramme for tilpasset opplæring gjelder altså ikke lenger for alle. Det individuelle perspektivet ved tilpasset opplæring blir gradvis sterkere betont. Det skjer bl.a. ved at begrepet 'individuelt tilpasset opplæring' stadig oftere omtales som et allment prinsipp» (ibid., s. 8). De henviser til Stortingsmelding 28 hvor det står: «Arbeidet med å gi elevar og lærlingar likeverdig opplæring i skole [...]

må ta utgangspunkt i evner, føresetnader, bakgrunn og interesser hos den enkelte. Dette er grunntanken i prinsippet om individuelt tilpassa opplæring. Dette prinsippet omfattar alle elevane.» (St.meld. nr. 28, KUF, 1998–1999, s. 11)

På bakgrunn av dette er det til dels forståelig at norsk skole har endt opp med en ensidig vektlegging av at elevene skal arbeide individuelt med oppgaver. I kapittel 2 henvises det til den til dels kraftige kritikken som har kommet fra matematikkdidaktiske forskere mot konstruktivismens ekstremt individualistiske utgangspunkt (Kilpatrick, 1987; Lerman, 1996; Waschescio, 1998; Sfard, 1998, 2006). I samme kapittel redegjøres det for læringsteorier med mer vekt på det sosiale, og som framhever viktigheten av deltakelse på en felles læringsarena, som for eksempel samtale og drøfting i klasserommet. Dette gjelder læringsteorier som sosialkonstruktivisme (Vygotsky, 2001; Björkquist, 2001) og i enda større grad sosiokulturell teori (Säljö, 2006). På bakgrunn av resultatene i TIMSS, både i grunnskolen og i videregående skole, synes det som om slike læringsteorier ikke har fått samme gjennomslag i norsk skole som det konstruktivismen har fått.

Også framtredende forskere i pedagogikk har stilt seg tvilende til at individuelle arbeidsformer vektlegges i så stor grad som det har blitt gjort i norsk skole, og peker på at dette kan skyldes en primitiv avvisning av fellesskapslæring som forkastelig formidlingspedagogikk (Imsen 2003b). Klasserommet som felles arena for læring har blitt bygd ned (ibid.; Klette, 2004, 2007), og tolkningen av kravet om tilpasset undervisning som individualisering ser ut til å ha ført til mer vekt på skriftlig arbeid. Å lære gjennom samhandling med andre er ansett for å være det sentrale elementet i Vygotskys innflytelsesrike teori om den nærmeste utviklingssonen for læring (Dysthe, 2007). I sosiokulturell læringsteori, som har sitt utgangspunkt i Vygotskys teorier, legges det videre stor vekt på det muntlige, på dialog, på mening som skapes i interaksjon med andre (Säljö, 2006). Særlig for elevenes begrepslæring antas dette å være viktig. Vygotskys teorier har hatt stor innflytelse på forskning i matematikkdidaktikk, ikke minst når det gjelder teorier om begrepsutvikling i faget (Waschescio, 1998; Sfard, 2006; Cobb, 2007). Betydningen av sosialt samspill kommer også til uttrykk i St.meld. nr. 16 (KD, 2006–2007, s. 76–77), som vektlegger positiv samhandling mellom elever som viktig for motivasjon, aktivitet og utholdenhet.

Teorier om læring i matematikk – og mer allmenn pedagogisk teori – vektlegger *variasjon* i undervisningsformer som viktig for å nå ulike elevgrupper og for å holde motivasjonen oppe. Det kommer også eksplisitt fram i St.meld. nr. 16 (KD, 2006–2007, s. 76):

> Tilpasset opplæring kjennetegnes ved variasjon i bruk av arbeidsoppgaver, lærestoff, arbeidsmåter, læremidler og variasjon i organisering av og intensitet i opplæringen.

Ansvaret for den ensidige vektleggingen av individuelle arbeidsmåter kan ikke bare legges på myndigheter, skoleledere og/eller lærere. At tilpasset opplæring har blitt implementert i skolen med ensidig vekt på det individuelle, kan i stor grad ha sitt utspring i hva mange pedagogiske forskere har lagt vekt på. Bachmann & Haug (2006, s. 48) påpeker:

> Det kan derfor spørres om også forskningen litt ensidig har etterspurt tilpasset opplæring som individualisering i form av individuelt arbeid, individuell veiledning og elevens valg, og med fravær av såkalt kateter- eller fellesskapsundervisning.

Analyser av elevenes prestasjoner i både matematikk og fysikk i TIMSS Advanced viser at elever som oftere arbeider med oppgaver presterer bedre enn elever som gjør dette i mindre grad. Det er derfor ikke bruken av denne arbeidsformen som framstår som problematisk, det problematiske er den *ensidige bruken*. Det gjelder i forhold til andre land som presterer bedre enn Norge, og hvor lærere og elever svarer at de i større grad også bruker andre metoder som for eksempel faglig argumentasjon og diskusjon. Det gjelder også i den klare, positive sammenhengen man finner i Norge, hvor klasser som i større grad bruker metoder som diskusjon og argumentasjon presterer bedre i matematikk enn klasser som gjør det i mindre grad. I følge sosialkonstruktivistisk læringsteori skal læreren være den personen som sørger for at kommunikasjonen i klasserommet knyttes an til det som regnes for å være matematisk anerkjente begreper og posisjoner (Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2006). Se kapittel 2 for mer om læringsteorier, og fysikkrapporten som også peker på at det er viktig med variasjon i bruken av undervisningsmetoder (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

11.4.2 Lekser i matematikk

Det er mye diskusjon om lekser og deres betydning for elevenes læringsresultat. Sterke meninger, ikke bare hos lærere, elever og foreldre, men i like stor grad blant politikere, står mot hverandre. At dette er et komplisert område, viser blant annet tonivåanalysene i kapittel 9, hvor sammenhengen mellom tid brukt på lekser er negativt korrelert med elevprestasjoner på individuelt elevnivå, mens det er en klar, positiv korrelasjon på klassenivå. Fordi enkelte faktorer, som for eksempel lekser, faller ut såpass ulikt på individuelt nivå og på klassenivå, er det lett å trekke feilaktige konklusjoner hvis man bare gjør analysene på ett nivå. Dette er utdypet i kapittel 9, og er grundig drøftet i en artikkel av Trautwein (2007). En nærliggende tolkning av at lekser korrelerer negativt på elevnivå og positivt på klassenivå, er at det er positivt for hvor godt en klasse presterer at læreren gir lekser av et visst omfang, mens elever som sliter eller kanskje ikke har utviklet gode strategier for å gjøre lekser, bruker relativt mye tid på dette sammenliknet med flinkere klassekamerater. Dette samsvarer med de tolkninger Trautwein (2007) gjorde etter å ha analysert spørsmålet om bruk av lekser i flere ulike studier, blant annet basert på en reanalyse av data fra TIMSS og PISA.

Resultatene av de analysene som er gjort i matematikk i TIMSS Advanced kan tyde på at også de som tar matematikk til topps i videregående skole kan trenge leksehjelp. Til en viss grad finnes det slik hjelp, noen ganger i offentlig regi og gratis, andre ganger på privat initiativ og mot betaling. En annen måte å tolke resultatet på er at man tidlig i skolen bør legge mer vekt på å lære elevene opp til gode strategier for hvordan de skal gjøre lekser. Våre analyser kan tyde på at det på individnivå ikke er mengden tid som brukes som er det viktigste, men også hvor effektivt den enkelte utnytter denne tiden.

Hyppig gjennomgang av lekser korrelerer ikke i noen retning med prestasjoner på elevnivå, mens man får en klar, signifikant, positiv sammenheng på klassenivå. Justerer man for hjemmebakgrunn får man fortsatt en positiv korrelasjon på klassenivå, men den synker like under grensen til å være signifikant. Selv om man ikke kan si noe sikkert om hva som er årsak og hva som er virkning i denne typen analyser, er det en rimelig tolkning at det er positivt for hvor godt klassen presterer i matematikk at læreren jevnlig gjennomgår leksene. Også i fysikk er det en klar, positiv sammenheng mellom hvor ofte lekser blir gjennomgått og hvor godt klassen presterer (Lie, Angell & Rohatgi, 2010).

Tonivåanalysene som er presentert i kapittel 9 viser en positiv og signifikant sammenheng mellom mengden av oppgaveløsing gjort som lekser og prestasjoner både på elevnivå og på klassenivå. På klassenivå er korrelasjonen meget høy. Dette er den høyeste korrelasjonen som ble funnet for alle de undervisningsfaktorene som er analysert i kapittel 9. Sammenhengen mellom elevenes prestasjoner og hvor mye de løser oppgaver i timene er også positiv, men den er langt lavere enn korrelasjonen for oppgaveløsing som lekser. Det ser derfor ut som at det mest effektive er at en del av den individuelle løsingen av oppgaver blir gitt som lekser. På den måten vil også noe av undervisningstiden i timene på skolen kunne frigjøres og brukes i større grad til å diskutere og argumentere rundt faglig innhold som strategier og løsningsmetoder. I forrige delkapittel ble det pekt på at det er et problem i norsk matematikkundervisning at for mye av tiden på skolen ensidig blir brukt til individuell oppgaveløsing, og for lite til andre typer arbeidsmåter, og at dette står i motsetning til hva som gjøres i land som presterer bedre enn Norge.

En styrke ved TIMSS Advanced er at man kan analysere sammenhenger mellom mange ulike faktorer, og på flere nivåer. Lekser og innholdet i disse kan på den måten settes inn i en bredere kontekst, og åpne for bedre forståelse av ulike virkemidler i undervisningen. At vi finner de klareste sammenhengene mellom elevenes prestasjoner og bruken av lekser på klassenivå, understreker den viktige rollen læreren har for å oppnå gode faglige prestasjoner i en klasse. Lærerrollen drøftes mer i delkapittel 11.4.4.

11.4.3 Kalkulatorbruk

Matematikklærerne i TIMSS Advanced fikk spørsmål om hvor ofte elevene bruker kalkulator på ulike måter i matematikktimene. Det framgår av svarene at Norge, Sverige og Nederland skårer klart over det internasjonale gjennomsnittet for bruk av kalkulator når det gjelder å tegne grafer og å løse likninger. Slovenia og Italia, som har et veldig godt resultat på matematikkdelen av TIMSS Advanced når man tar med i betraktningen at de tester henholdsvis vel 40 % og 20 % av årskullet, skårer derimot generelt lavt på alle spørsmålene om bruk av kalkulator i matematikktimene. Det er tankevekkende at Norge og Sverige, som har den mest markante tilbakegangen fra forrige studie, utmerker seg som to land der elevenes bruk av kalkulator er høy. Tonivåanalysene av bruk av kalkulator for norske elever gir lite informasjon om sammenheng med elevprestasjonene i matematikk. Grunnen er at omtrent alle bruker kalkulator hele tiden og da gir ikke dataene muligheter for gode analyser. Men sammenlikningen med andre land peker mot at mye bruk av kalkulator ikke bidrar til sterkere elevprestasjoner.

Fra noen hold har det blitt hevdet at kalkulatorer kan hjelpe elevene til en dypere forståelse av matematiske begreper, mens andre heller har betraktet dem som krykker som hindrer elever i å utvikle ferdigheter i for eksempel algebra og funksjonsdrøfting (Brown, 2009; Persson, 2009). Her må man ta i betraktning at dataene fra TIMSS Advanced ikke er egnet til å si noe særlig om hvordan kalkulatorer brukes. Det er ikke bare *om* og *hvor mye* kalkulatorer brukes som er viktig, men i like stor grad *hvordan* de brukes.

En gjennomgang av nyere forskning om matematikklæring, og da spesielt læring av algebra, med kalkulatorer som *kognitive redskaper* er presentert i en oversiktsartikkel skrevet av Per-Eskil Persson (2009). Noen hovedresultater fra denne forskningen er at kalkulatorbruk kan fremme elevers ferdigheter i, og forståelse av, matematikk. Det er imidlertid viktig å påpeke at dette først og fremst gjelder for situasjoner der elevene bruker kalkulatoren slik at de kan løse mer komplekse matematiske problemer, ved at de kan delta i kognitive aktiviteter som ellers ville vært utenfor deres rekkevidde (ibid.).

Hvis en kalkulator brukes som et rent *teknisk instrument*, til å gjøre enkle beregninger istedenfor at elevene selv trener inn og behersker grunnleggende ferdigheter i aritmetikk, algebra eller analyse, kan det sammenliknes med å lære friske barn å bruke en krykke istedenfor å lære dem å gå.

11.4.4 Lærerrollen

Resultatene i matematikk i TIMSS Advanced peker på lærerens viktige rolle som leder og organisator, det være seg faglig så vel som pedagogisk. Det gjelder i delkapittel 11.4.1 om undervisning og undervisningsmetoder, det gjelder i delkapittel 11.4.2 om lekser i matematikk, og det gjelder i delkapittel 11.4.3 om bruk av kalkulator. Det samme er understreket i kapittel 9 med henvisning til at det er på klassenivå man finner de klareste sammenhengene med prestasjonene. I kapittel 2 er det henvist til sosialkonstruktivistisk og sosiokulturell læringsteori som understreker lærerens viktige rolle som den personen som sørger for at kommunikasjonen i klasserommet knyttes an til det som regnes for å være matematisk anerkjente begreper og posisjoner (Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2006). At læreren kanskje er den viktigste faktoren når det gjelder hvor mye elevene lærer, understrekes også i metaanalyser av et stort antall studier av læringseffekter (Hattie, 2009). Også nordiske forskere har pekt på det samme (Nordenbo et al., 2008).

Det er særlig når det gjelder hvor variert bruken av undervisningsmetoder er, og omfang og innhold av lekser at man får høye korrelasjoner med matematikkprestasjoner i klassene. Dette er faktorer som det er naturlig å anta at læreren har den største innvirkningen på; det samme er det naturlig å anta gjelder *på hvilken måte* det legges opp til bruk av kalkulator. Den enkelte lærer opererer selvsagt innenfor visse rammebetingelser. For eksempel kan både læreplaner og i ennå større grad eksamen antas å ha en avgjørende innflytelse på opplegg og på hvor lett det er å motivere elever for ulike måter å arbeide på. Man kan ikke si noe sikkert om hva som er årsak og hva som er virkning i den typen tonivåanalyser som er gjennomført i kapittel 9. Likevel er en nærliggende konklusjon at for å oppnå gode matematikkprestasjoner i en klasse, er det en fordel om læreren gir elevene lekser av et visst omfang med vekt på løsing av oppgaver, og bruker varierte undervisningsmetoder i timene med vekt på faglig diskusjon og argumentasjon i tillegg til individuell oppgaveløsing.

I tidligere rapporter fra TIMSS 2003 (Grønmo et al., 2004) og PISA 2003 (Kjærnsli et al., 2004) problematiseres og drøftes det at den endringen man har sett i lærerrollen kan være en medvirkende årsak til tilbakegangen i elevprestasjoner fra 90-tallet.

> Vi ser en sterk betoning av «ansvar for egen læring», elevsentrerte undervisningsformer, selvstendig læringsarbeid, prosjektarbeid og egenvurdering. Med endret elevrolle har vi som en konsekvens fått en ny lærerrolle. I tråd med fokus på elevenes selvstendige læringsarbeid har lærerens oppgave blitt å legge til rette slik at læring kan skje. Forenklet kan vi si at lærerens rolle er endret fra formidler til veileder. (Kjærnsli et al., 2004, s. 255)

Resultatene fra TIMSS Advanced indikerer at for å oppnå gode faglige prestasjoner er det viktig at lærerens rolle er langt mer enn bare å være tilrettelegger og veileder. Lærerne bør kunne forvente støtte fra både skoleforskere, skolemyndigheter, foreldre og samfunnet i dette. Det de minst av alt trenger er en generell nedtoning av deres viktige rolle som leder. Et annet moment som kan nevnes i denne sammenheng, er at norske lærere, både på barnetrinnet, på ungdomstrinnet og i videregående skole, i mindre grad enn i andre land deltar i faglig relevant etter- og videreutdanning. Å møte kolleger fra ulike skoler i slike sammenhenger kan virke positivt på lærerne både når det gjelder å få tilgang til forskningsresultater, og når det gjelder å bli trygg i sin egen rolle som leder i klassen. Når norske lærere ikke får det i samme grad som lærere i andre land, kan det være noe av årsaken til at lærerne i mindre grad enn i andre land bruker varierte metoder i undervisningen.

11.5 Intendert læreplan – systemnivå

11.5.1 Hvorfor matematikk i skolen?

I kapittel 2 er det redegjort for ulike typer begrunnelser som brukes for å legitimere den sentrale plassen matematikk har i skolen verden over. Det blir henvist til den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss (2003) som har kategorisert begrunnelser som dreier seg om samfunnets behov for personer med høy kompetanse i matematikk, og om den enkeltes behov for slik kompetanse i dagligliv og i mange yrker i et moderne samfunn. De nordiske landene synes å ha lagt mest vekt på den enkeltes behov for elementær matematikk i dagliglivet og for å kunne delta som en aktiv samfunnsborger, mens samfunnets behov for personer med mer avanserte matematikkunnskaper har kommet i skyggen (Gardiner, 2004; Grønmo & Bergem, 2009).

Dagens høyt utviklede teknologiske samfunn er gjennomsyret av matematiske modeller og beregninger (Skovsmose, 1994; Ernest, 2000). I den reviderte læreplanen for matematikk i videregående skole etter Reform 94 står det: «Stadig flere studerer et fag der de trenger matematikk som verktøy, og mange har et arbeid som forutsetter matematiske kunnskaper eller bygger på matematisk teknologi. I et moderne samfunn finnes matematikken overalt uten at vi legger merke til den.» (KUF, 2000, s. 4) De som velger fordypning i matematikk i videregående skole – spesielt 3MX-elevene inntil 2008 – utgjør den gruppen elever som er mest aktuelle for å ta utdanninger og senere gå inn i profesjoner som krever en solid faglig basis i matematikk. Den klare tilbakegangen vi ser i 3MX-elevenes kunnskaper i matematikk kan derfor få store konsekvenser. Det gjelder for den enkelte som ikke får de kunnskaper i faget som de trenger for å utdanne seg til det yrket de ønsker, og for samfunnet som helhet som ikke får et tilstrekkelig antall eksperter på sentrale fagområder hvor man trenger gode basiskunnskaper i matematikk. Samfunnets behov for høyt utdannet arbeidskraft med gode kunnskaper i matematikk ligger blant annet til grunn for de ulike satsningene på realfag man har sett de senere årene.

Et betimelig spørsmål kan være om behovet for at en viss andel av befolkningen har gode basiskunnskaper utover dagliglivsmatematikk er nedfelt i den intenderte læreplanen. Det gjelder både i politiske dokumenter og enda mer i formelle læreplandokumenter. Sammenlikner man disse, ser det ut til å være en viss motsetning mellom de pene ordene om å satse på realfag i en del politiske dokumenter, og det som står om hva elevene skal lære i aktuelle læreplaner. Læreplanen i matematikk for videregående skole fra 1994 ble revidert i 2000. En viktig begrunnelse for denne revisjonen var at man måtte samordne planene for videregående skole med læreplanen i matematikk for grunnskolen fra 1997. De viktigste endringene i 3MX fra 1994 til 2000 er beskrevet i vedlegget bak i boka. Mye stoff ble tatt ut av 3MX, noe ble flyttet til 2MX og en del nytt ble tilføyd. I sum må en kunne si at de faglige kravene i 3MX ble svekket i noen sentrale temaområder i videregående skole. For eksempel ble funksjonslæren i «nye» 3MX begrenset til trigonometriske funksjoner.

Det er ikke overraskende at en del faglige krav ble noe dempet. Hvis elevene starter med svakere basiskunnskaper i matematikk fra grunnskolen, vil det uansett måtte få konsekvenser for kunnskapstilegnelsen også i videregående skole. Læreplanen L97 for grunnskolen la stor vekt på «Matematikk i dagliglivet», som ble gjort til matematikkplanens første målområde på alle trinn i grunnskolen. Planen understreker også flere steder i innledningen at dette er gjort for å gjøre matematikkfaget brukerorientert, gi det en sosial tilknytning og vekke interesse. Denne klare vektleggingen gikk til en viss grad på bekostning av arbeid med formelle matematiske begreper, kunnskaper og ferdigheter. Resultatene fra TIMSS siden midten av 90-tallet, både i grunnskolen og i videregående skole, samsvarer i så måte godt med utviklingen av læreplanene. Man kan selvsagt hevde at når en større andel av elevene tar studieforberedende fag i videregående skole, må det føre til at faglige krav kanskje må settes noe lavere. Motspørsmålet blir om det skal gjelde for alle elever, slik at kravene til hva elever skal lære i matematikk senkes også for de faglig sterkeste elevene som fortsatt er en minst like selektert gruppe i videregående opplæring. Eller er det den tidligere omtalte troen på at «de flinkeste greier seg uansett» som har hatt så stor gjennomslagskraft at dette ikke har blitt vurdert grundig nok?

Den økte vekten på *matematikk for alle* med mye oppmerksomhet på dagliglivets matematikk har kanskje hatt utilsiktede og negative konsekvenser for de faglig sterke elevene. Hvis «matematikk for alle» tolkes som at skolen skal legge hovedvekten på et innhold som alle elever har mulighet til å lære, vil dette nødvendigvis føre til at elever med spesiell interesse og talent for matematikk ikke får de utfordringene de trenger i norsk skole. Den nedtoningen det har vært av algebra i norsk skole, har hatt uheldige konsekvenser for dyktige elever med interesse for realfag. Matematikkunnskaper må, som i andre fag, trenes og vedlikeholdes over tid for å kunne anvendes på en fleksibel måte (Bahrick & Hall, 1991).

Det har blitt hevdet at måten tilpasset opplæring har blitt implementert på i skolen, i liten grad har tatt hensyn til elever med spesielle anlegg, for eksempel i matematikk (Skagen, 2002; Grønmo & Onstad, 2009). Det er kanskje ikke så rart, når man vet at tilpasset opplæring i sine tidlige faser var knyttet nært opp til integrering av elever fra spesialskoler (Jenssen & Lillejord, 2009); se også delkapittel 11.4.1.

Fagre ord om betydningen av økt rekruttering og bedre kunnskaper i realfag i ulike politiske dokumenter blir neppe mer enn det, om ikke dette også gjenspeiler seg i de formelle læreplandokumentene. Vi tenker ikke her på de generelle delene av planen, men på hva som er det faglige innholdet elevene skal lære. Det betyr ikke at alle elever skal lære mye mer matematikk, men at også hensynet til de faglig sterke elevene må gjenspeile seg i læreplandokumentene. I hvilken grad det skal føre til mer differensierte læreplaner, eller om det bedre kan løses på andre måter, er utenfor rammene for denne boka. Vi peker bare på behovet for en grundigere debatt om hvordan man skal ta hensyn også til de faglig sterkeste elevene i skolen, spesielt i et fag som matematikk hvor spredningen i kunnskaper hos elevene er svært stor. Det berører innholdet i læreplanene, både i grunnskolen og i videregående skole.

I rapporten fra TIMSS 2007 ble det framhevet at om norske grunnskoleelever i mindre grad enn jevngamle elever i andre land får opplæring i algebra, vil det kunne føre til at norske elever har et dårlig utgangspunkt for å velge fordypning i matematikk i videregående skole (Grønmo & Onstad, 2009). Spesielt vanskelig kan det bli hvis de ønsker å ta deler av sin utdanning i andre land, noe det i dag legges mye vekt på at elever og studenter skal ha mulighet til. For elever som liker matematikk vil mer algebra i grunnskolen også kunne gi en type utfordringer som bidrar til økt faglig interesse og motivasjon, og som i neste omgang kan føre til at flere velger fordypning på videregående skole.

11.5.2 Eksamen og testing av ferdigheter

Psykologisk forskning har pekt på at når matematisk kunnskap tilegnes over flere år, der det opprinnelige innholdet repeteres og brukes i senere matematikkurs, vil ens kompetansenivå ved avsluttet utdanning kunne opprettholdes over relativt lang tid (Bahrick & Hall, 1991). At eksamen i 3MX var lagt opp slik at elevene ikke skulle testes i pensum fra 2MX, kan antas å ha medvirket til manglende vedlikehold av viktige ferdigheter i matematikk. Det gjelder for eksempel en ferdighet som derivasjon, som var mer framtredende som lærestoff i 2MX. Vedlikehold av denne type ferdigheter er en viktig basis for videre studier i realfag og i fag som bruker matematikk som redskap. Også det at grafisk kalkulator og formelbok med egne notater har vært tillatt brukt på hele eksamen og gjennomgående på matematikkprøver, kan antas å ha medvirket til de svake resultatene og den store tilbakegangen i prestasjoner som vi ser hos norske 3MX-elever. Den nylig vedtatte todelingen av eksamen i matematikk er positiv med sikte på å teste elevene i grunnleggende ferdigheter, og å stimulere til vedlikehold av disse. Det samme kan sies om nye signaler om at man skal kunne testes i det man har lært for eksempel i kurset R1 ved eksamen i R2. Læreplanen har denne formuleringen: «Matematikk R2 bygger på matematikk R1, som igjen bygger på matematikk Vg1T.» (KD, 2006c, s. 1) Utdanningsdirektoratet gir hvert år ut en vurderingsveiledning for matematikk. Der kan vi finne følgende formulering: «Det forutsettes at en behersker grunnleggende formler og framgangsmåter fra tidligere kurs og skolegang.» (Utdanningsdirektoratet, 2010, s. 8) Dette legitimerer eksamensoppgaver med stoff også fra lavere årstrinn. Det vil kunne få betydning for hvordan undervisningen i skolen legges opp.

Med innføringen av Kunnskapsløftet (LK06) har betydningen av innlæring av grunnleggende ferdigheter blitt framhevet og presisert som noe som skal trenes inn i alle fag. Grunnleggende ferdigheter i alle fag går på å utrykke seg muntlig og skriftlig, å kunne lese, regne og bruke digitale verktøy. I den enkelte fagplan er det konkretisert hva det betyr. I matematikkplanen framheves bruk av symboler, formler, logiske resonnementer og formelt språk som en del av de grunnleggende ferdighetene å kunne utrykke seg skriftlig og muntlig i matematikk. På den bakgrunn er det vanskelig å forstå hvorfor de nasjonale prøvene i matematikk er blitt til nasjonale prøver i regning, og er snevret inn til bare å teste elevenes regneferdigheter. På tross av at LK06 peker på at bruk av symboler, formler, logiske resonnementer og formelt språk som en viktig del av grunnleggende ferdigheter i matematikk, skal de nasjonale prøvene ikke teste grunnleggende ferdigheter i for eksempel algebra. Det synes å være en betydelig snevrere oppfatning av hva som er grunnleggende ferdigheter i matematikk som ligger til grunn for det mandatet myndighetene har gitt om at nasjonale prøver ikke skal inneholde algebra, enn det som LK06 legger opp til (http://www.udir.no/Tema/Lareplaner). Som påpekt flere ganger i denne boka, det er viktig å ha klart for seg at grunnleggende ferdigheter i matematikk er langt mer enn rene regneferdigheter.

11.5.3 Fagvalg og rekruttering

Bare 11 % av årskullet valgte 3MX i skoleåret 2008–2009. Dette er lavere enn det var i forrige studie. De to viktigste grunnene elevene oppgir for valg av 3MX er at det gir dem flere valgmuligheter etter videregående skole og at det er et krav for å studere det de ønsker. Tro på egen mestring, et positivt syn på matematikk og gode lærere ligger også høyt på lista over begrunnelsene for å velge matematikk til topps i videregående opplæring. Mulige tiltak for å øke rekrutteringen til matematikk kan derfor være klarere krav fra høyere utdanningsinstitusjoner om at matematikkfordypning kreves eller er nødvendig for videre studier, samt en satsing på å utdanne gode matematikklærere på alle nivåer i skolen. Det sistnevnte er ikke minst viktig på bakgrunn av den høye alderen som kjennetegner de norske lærerne man har i 3MX i dag.

Hele 99 % av 3MX-elevene har planer om å ta høyere utdanning, og de mest populære studieønskene er ingeniørfag, helsefag og handelsfag. De to mest populære studiene, ingeniør- og helsefag, markerer seg klart som henholdsvis gutte- og jentefag. I samtlige deltakerland er andelen gutter som ønsker å studere ingeniørfag signifikant høyere enn jenteandelen, noe som også gjenspeiler seg i de norske resultatene. Motsatt er det en mye større andel av de norske jentene som ønsker å satse på et helsefaglig studium. Et liknende bilde viser seg i Italia, Nederland og Sverige. Elevenes rapporterte studieønsker samsvarer med hva som allerede er situasjonen på norske universiteter og høyskoler; andelen jenter på studier innenfor medisin, miljø og biologi er høy, mens den er svært lav innenfor studier i ingeniørfag og fysikk (Schreiner & Sjøberg, 2005).

Frafall fra studier på universiteter og høyskoler er et problem i Norge, ikke minst i matematikkrevende studier som ingeniør- og økonomifag. I 2008 gjennomførte NOKUT en evaluering av ingeniørutdanningene. Evalueringsrapporten peker på manglende kunnskaper i matematikk fra videregående skole som den viktigste årsaken til frafall i ingeniørstudiet, og de anbefaler en gjennomgang av fagplanene i matematikk i videregående skole (NOKUT, 2008). Problemer med studenters manglende kunnskaper i matematikk er også påpekt i Norsk Matematikkråds undersøkelser. Deres undersøkelser som startet i 1982, viser en generell tilbakegang i matematikkunnskaper hos studenter som starter på studier som krever et visst grunnlag i matematikk (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten, 2006).

Både samfunnsøkonomisk og for den enkelte student er det lite gunstig at mange kommer inn på studier som man kan anta at de har små muligheter til å fullføre på grunn av manglende forkunnskaper i matematikk. Som påpekt ovenfor henger dette sammen med innhold og metoder i undervisningen i hele skolesystemet, ikke bare i videregående skole. Tiden er moden for å ta på større alvor den viktige redskapssiden av matematikkfaget. Matematikk er ikke bare et fag i seg selv; for mange elever er matematikk som redskap for å tilegne seg andre fag vel så viktig. Behovet for matematikk som redskapsfag vil imidlertid mange elever først bli konfrontert med som et problem relativt sent i utdanningsløpet, når de velger videregående og høyere utdanning. Samtidig er det en forutsetning for å tilegne seg matematikk at man har arbeidet jevnt og systematisk med det over lang tid. Ansvaret for å legge til rette og gjennomføre dette, og for å motivere elevene for å lære faget, ligger hos både politikere, skolemyndigheter, forskere, lærere og kanskje også hos foreldre.

Det kan kanskje oppleves som snilt å ikke stille så høye krav til hva elevene skal lære i matematikk, spesielt på de lavere trinnene i skolen. Å tone ned trening av ferdigheter og heller vektlegge morsomme aktiviteter er kortsiktig tenkt, når man vet at mange elever senere vil ha dårlige forutsetninger for å fullføre den yrkesutdanningen de ønsker. Det er viktig å være klar over at dette i stor grad ikke dreier seg om veldig avansert matematikk, men ofte om ulike typer grunnleggende kunnskaper og ferdigheter, som svært mange elever vil kunne trene inn ved litt ekstra innsats. Trening og øving av ferdigheter er kanskje ikke det mest spennende, men det er sentralt for å lykkes på de fleste områder, det være seg pianospill, fotball eller matematikk. I så måte er ikke matematikk mer mystisk enn andre fag eller aktiviteter. For mer om trening og læringsstrategier i matematikk, se Grønmo og Trondsen (2006) og Sigmundson (2008). Matematikk er ikke så vanskelig som mange vil ha det til å være. Hvorfor skulle det være vanskeligere i dag enn det var tidligere?

11.6 Avsluttende oppsummering med kommentarer

Norske 3MX-elever presterer generelt svakt i matematikk i TIMSS Advanced 2008, og det er en sterk tilbakegang for norske elever i både matematikk og fysikk fra forrige studie. Her oppsummerer vi noen viktige problemer og utfordringer man står overfor i norsk skole basert på analysene i denne boka og i fysikkboka, og med referanser til andre studier av norsk skole, spesielt resultater fra tidligere TIMSS-studier av elever i grunnskolen. Det som oppsummeres er basert på resultater og analyser av TIMSS-data fra barneskolen (4. trinn), ungdomsskolen (8. trinn) og slutten av videregående skole (3MX- og 3FY-elever), og som har blitt presentert tidligere i boka og drøftet videre i dette kapittelet. Sverige synes å stå overfor mange av de samme problemene og utfordringene vi peker på for norsk skole, når det gjelder både elevprestasjoner, undervisningsfaktorer, læreplaner og eksamensformer.

- Det er et gjennomgående trekk at man i undervisningen på alle trinn i norsk skole legger mye vekt på individuelle arbeidsmåter som oppgaveløsing (og lite vekt på andre metoder). Det gjelder både trening og drilling med sikte på automatisering av grunnleggende ferdigheter, og diskusjon og argumentasjon i klassen rundt problemløsing og strategier. Individuell oppgaveløsing er viktig for å utvikle matematisk kompetanse, og klasser hvor det legges mer vekt på dette, særlig i form av lekser, presterer bedre enn klasser hvor det legges mindre vekt på det. Det er *ensidigheten i bruk av individuelle arbeidsmåter* som er et problem i norsk skole. Land som presterer bedre enn oss på de trinnene vi har undersøkt i TIMSS og TIMSS Advanced, har mer variasjon i bruk av metoder. Klasser i Norge hvor det legges mer vekt også på metoder som diskusjon og argumentasjon av strategier og problemløsing, presterer bedre i matematikk i TIMSS Advanced enn klasser hvor man gjør dette i mindre grad.
- Lærere i Norge på alle trinn deltar relativt lite i faglig relevant etter- og videreutdanning. Dette kan være en medvirkende årsak til at norske lærere legger opp til mindre varierte metoder i sin undervisning enn lærere i mange andre land. Slike kurs kan være et forum for lærere hvor de

både får innspill om faglig relevant forskning, og hvor de kan debattere egne erfaringer med kolleger fra andre skoler. Det vil kunne bidra til at lærerne får muligheter til å utvikle egen undervisning med sikte på bedre faglige resultater.

- Den ensidige vekten på individuelle undervisningsmåter i norsk skole kan også ha sammenheng med at tilpasset opplæring på 90-tallet og inn i dette århundret i stor grad har blitt tolket som individualisering. En ensidig vekt på konstruktivistisk læringsteori, med dens sterke betoning av det individuelle, og en tilsvarende mindre vekt på andre læringsteorier som sosialkonstruktivisme og sosiokulturell teori, kan ha medvirket til dette. Den sterke vekten på individualisering, med en nedtoning av klassen som en felles læringsarena, kan være en av årsakene til den tilbakegangen i prestasjoner som vi har sett i TIMSS og TIMSS Advanced. Det viktige sosiale og faglige læringsfellesskapet som klassen representerer med læreren som leder har blitt skadelidende. Våre analyser understøtter lærerens viktige rolle som både faglig og pedagogisk leder i klassen, og klassens betydning som felles læringsarena.
- En utstrakt bruk av kalkulator og andre hjelpemidler i klassen og på prøver og eksamener kan ha bidratt til at elevene i mindre grad enn tidligere er motivert for å lære ting med sikte på å huske det. Flere av landene som presterer bedre enn oss, både i grunnskolen og i videregående skole, bruker ikke kalkulator i like høy grad.
- Matematikk er et hierarkisk fag. Når elevenes kunnskaper synker på ett trinn, vil det med stor sannsynlighet få konsekvenser for hva elevene lærer på høyere trinn. Basert på analyser av resultatene i TIMSS Advanced gjelder det selv for de faglig sterkeste elevene. Resultatene fra TIMSS Advanced i både matematikk og fysikk peker på elevenes svakere forkunnskaper fra grunnskolen, særlig ferdigheter i aritmetikk og algebra, som en av årsakene til den store tilbakegangen i prestasjoner i 3MX og 3FY.
- Elevenes resultater på oppgavene i matematikk og fysikk i TIMSS Advanced tyder også på at norske elever ikke behersker grunnleggende ferdigheter i matematikk. Det gjelder elementære ferdigheter i aritmetikk, algebra og analyse. Med Kunnskapsløftet ble grunnleggende ferdigheter i matematikk framhevet som viktig, men har i praksis blitt tolket som regneferdigheter i snever forstand, uten en erkjennelse av at det finnes grunnleggende ferdigheter i matematikk på alle nivåer. Hvis elevene ikke

trener inn slike grunnleggende ferdigheter, vil det gå ut over deres prestasjoner både i matematikk og i andre fag som bruker matematikk som redskap. I videregående skole brukes matematikk for eksempel mye i fysikk og elektrofag. På høyere nivåer i utdanningssystemet er matematikk et redskapsfag i mange fag, eksempelvis medisin, ingeniør-, informatikk-, økonomiutdanninger og i samfunnsfagene. Når skolen svikter i å gi elevene de grunnleggende ferdighetene de trenger i matematikk for sine videre studier, vil det kunne føre til at elevene ikke lykkes med å få det yrket de ønsker seg og er motivert for. Dette er et problem både for den enkelte og for samfunnet som trenger personer med slike utdanninger.

- Våre analyser viser at både mengden av lekser som læreren gir til en klasse, og hvor ofte leksene følges opp i klassen, henger positivt sammen med klassens faglige prestasjoner i matematikk. TIMSS-studier både i grunnskolen og i videregående skole viser at norske lærere gir lekser omtrent som lærere i andre land, problemet er at de ikke følges opp i samme grad. Både disse faktorene og behovet for mer variert bruk av metoder i undervisningen peker på klassen som en viktig arena for læring, og på lærerens viktige rolle som leder og organisator av denne arenaen.
- Mål og planer for norsk skole utrykkes både i læreplandokumenter og i ulike andre offentlige dokumenter. For realfagene gjelder det for eksempel «Et felles løft for realfagene» (KD, 2006b) og «Realfag for framtida» (KD, 2010) med høye mål og ambisjoner for styrking av realfagene. Det kan synes som om det faglige innholdet som elevene skal lære ifølge læreplanene ikke helt samsvarer med det som står i innledningene til planene og i andre offentlige dokumenter. Skal elevene få den kompetansen som etterlyses i en del offentlig dokumenter, må det få konsekvenser for innhold i læreplaner og eksamener på alle nivåer i skolen.
- Sammen med læreplanene er innhold og organisering av eksamen og andre tester de sterkeste styringsredskapene for undervisningen i skolen. Når det for eksempel har vært et krav at elevene *ikke* skal testes i algebra i nasjonale prøver, viser det en nedvurdering av hvor viktig denne typen kunnskap er for elevenes videre skolegang. Det samme kan sies om at man i stor grad har lagt opp til at elevene til eksamen ikke skal testes i stoff som ligger på nivå under det aktuelle kurset de nå tar. I et hierarkisk fag som matematikk står det i motsetning til behovet for å vedlikeholde grunnleggende ferdigheter.

- Med innføringen av Kunnskapsløftet er det tatt noen positive skritt med sikte på å bedre såvel innholdet i læreplanene som innhold og organisering av eksamen. Det gjelder for eksempel økt vekt på grunnleggende ferdigheter gjennom en todeling av eksamen, én del uten hjelpemidler og én del med hjelpemidler. Dette vil kunne hjelpe elevene til å fokusere mer på grunnleggende kunnskaper og ferdigheter i faget, og hjelpe lærerne til å motivere elevene for viktigheten av å lære dette. Elevene kan ikke lenger «stole blindt» på kalkulatoren eller medbrakte notater. Det er også positivt at det legges opp til at elevene skal kunne testes i kunnskaper som ligger under det nivået de nå er på.
- Den norske skolen har ikke i tilstrekkelig grad maktet å ta hensyn til de faglig sterke elevene; det gjelder i grunnskolen så vel som i videregående skole. Den store vektleggingen av matematikk for alle, med vekt på dagliglivsmatematikk og «Mathematical Literacy», kan ha fått konsekvenser for de faglig sterke elevene som nok ikke var tilsiktet, men som må tas på alvor. Prinsipper om tilpasset opplæring gjelder for alle grupper elever og deres rett til hjelp og utfordringer, både de faglig sterke og de som sliter faglig.
- Vi har undersøkt elevene i 3MX og 3FY som var det siste kullet etter gammel læreplan R94 (med revisjon i 2000). Innføringen av Kunnskapsløftet og vedtatte endringer i eksamen vil kunne bidra til en bedre utvikling framover, slik vi har sett tilløp til i TIMSS 2007. Basert på de punktene vi har oppsummert over, anbefaler vi likevel en grundig gjennomgang av innhold i så vel læreplaner som hvordan matematikkundervisningen legges opp og gjennomføres på alle nivåer i skolen. Det er en høy grad av konsistens i den dokumentasjonen som er presentert for hva som er problematisk både på barnetrinnet, på ungdomstrinnet og i videregående skole i TIMSS-studiene. I en slik gjennomgang må man finne løsninger som tar hensyn til hva ulike gruppene av elever vil trenge, ikke bare i dagliglivet, men også i høyere utdanninger og yrker. Det gjelder både de elevene som sliter faglig og de som er faglig sterke. Mange av de problemene som er avdekket, går på trening og innlæring av ulike typer grunnleggende kunnskaper som norske elever i langt større grad hadde på midten av 90-tallet.

12 Rammeverk og metoder

Hovedforfatter: Torgeir Onstad

Dette kapittelet gir en kortfattet beskrivelse av bakgrunnen for TIMSS Advanced og en gjennomgang av hvordan studien er planlagt og gjennomført. Framstillingen bygger på kapittel 10 i rapporten fra TIMSS 2007 (Onstad & Grønmo, 2009), og på den internasjonale tekniske rapporten til TIMSS Advanced 2008 (Arora et al., 2009) som gir en grundig og detaljert framstilling av studien.

12.1 Hva er TIMSS og TIMSS Advanced?

12.1.1 Historikk

TIMSS er en forkortelse for *Trends in International Mathematics and Science Study*. Det er først og fremst en stor internasjonal undersøkelse av matematikk og naturfag i grunnskolen. TIMSS beskriver og sammenlikner elevprestasjoner i disse fagene, så vel nasjonalt som internasjonalt, og søker å belyse og forstå forskjeller i prestasjoner ut fra andre data i undersøkelsen. Slik kan man si noe om hvilke faktorer som fremmer læring, og hvilke som hemmer læring. TIMSS administreres av den internasjonale organisasjonen IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*). IEA er et internasjonalt nettverk for utdanningsforskning som ble etablert i 1959.

IEA arrangerte undersøkelsen FIMS (*First International Mathematics Study*) i begynnelsen av 1960-årene (Husén, 1967). Undersøkelsen ble etterfulgt av FISS (*First International Science Study*) tidlig på 1970-tallet (Comber & Keeves, 1973). Deretter fulgte SIMS (*Second International Mathematics Study*) i første halvdel av 1980-tallet (Travers & Westbury, 1989; Robitaille & Garden, 1989; Burstein, 1992) og SISS (*Second International Science Study*) omtrent samtidig (IEA, 1988; Postlethwaite & Wiley, 1992; Rosier & Keeves, 1991). Norge deltok bare i SISS (Sjøberg, 1986). Det er vanskelig å knytte bestemte årstall til disse første store internasjonale studiene, da de ble gjennomført til forskjellige tider i de ulike landene som deltok.

Tidlig på 1990-tallet slo man sammen de to studiene til en felles tredje runde for både matematikk og naturfag. Den ble kalt TIMSS, da med betydningen *Third International Mathematics and Science Study*. Denne versjonen av TIMSS ble gjennomført i 1995 med Norge som deltakerland (Harmon et al., 1997; Lie, Kjærnsli & Brekke, 1997a, 1997b; Brekke et al., 1998; Kjærnsli et al., 1999; Kind et al., 1999). Den ble gjentatt i 1999 under betegnelsen *TIMSS Repeat*, da uten norsk deltakelse (Mullis et al., 2000; Martin et al., 2000).

Ettersom TIMSS er en *trendstudie*, det vil si at man i tillegg til å sammenlikne mellom land også legger til rette for å sammenlikne over tid, har man fra og med undersøkelsen i 2003 valgt å beholde forkortelsen TIMSS, men med den nye, nåværende betydningen *Trends in International Mathematics and Science Study*. Hvordan det tilrettelegges for trendstudier, ser vi nærmere på senere i dette kapittelet. TIMSS gjennomføres hvert fjerde år. Undersøkelsen ble gjennomført i 2003 (Mullis et al., 2004; Martin et al., 2004) og i 2007 (Mullis, Martin & Foy, 2008; Martin, Mullis & Foy, 2008), begge ganger med norsk deltakelse (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009). Arbeidet med neste undersøkelse, TIMSS 2011, har allerede pågått en god stund. Det omfatter blant annet utarbeidelse av rammeverk for studien, og utvikling og pilotering av instrumenter (oppgaver og spørreskjemaer) til hovedundersøkelsen våren 2011.

TIMSS undersøker to populasjoner, nemlig elever på 4. og 8. trinn i grunnskolen. Studien i 1995 var imidlertid utvidet; den undersøkte også elever i avgangsklassene i videregående skole (Mullis et al., 1998). Det ble definert tre populasjoner på øverste trinn i videregående skole:

- **Generalistene**
  Denne populasjonen besto av alle elever i samtlige studieretninger på øverste trinn i videregående skole. Disse elevene ble testet i allmenne matematikk- og naturfagkunnskaper.
- **Fysikkspesialistene**
  Denne populasjonen besto av de elevene som tok høyeste spesialisering i fysikk; i Norge betydde det elevene i kurset 3FY. Disse elevene ble bare testet i fysikk.

- **Matematikkspesialistene**
  Denne populasjonen besto av de elevene som tok høyeste spesialisering i matematikk (på engelsk *advanced mathematics*); i Norge betydde det elevene i kurset 3MX. Disse elevene ble bare testet i matematikk. (De norske myndighetene valgte i tillegg å teste elever i kurset 3MY for å få et bredere inntrykk av situasjonen her i landet.)

Norge deltok bare i de to første av disse populasjonene i 1995. Myndighetene ønsket imidlertid også en undersøkelse av matematikkspesialistene, og i 1998 gjennomførte man den samme matematikkundersøkelsen i Norge som hadde vært gjennomført internasjonalt i 1995. Det ble utgitt en samlet norsk rapport for disse tre undersøkelsene (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999).

Det at Norge gjennomførte matematikkundersøkelsen i etterkant av den internasjonale studien, hadde visse konsekvenser. De norske resultatene kom ikke med i den internasjonale databasen. De var ikke med i grunnlaget for den standardiserte skalaen og beregningen av det internasjonale skalerte gjennomsnittet. Det betyr at det er noe større usikkerhet forbundet med norske data fra 1998 enn det ville ha vært dersom Norge hadde deltatt i 1995. Vi får likevel et godt inntrykk av hvordan Norge gjorde det i 1998 i forhold til andre land i 1995, slik dataene ble analysert i den norske rapporten den gang (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999), og et godt grunnlag for å vurdere hvordan de norske prestasjonene i matematikk har forandret seg fra 1998 til 2008.

Det er undersøkelsene av matematikk- og fysikkspesialistene i TIMSS 1995 som har blitt videreført som TIMSS Advanced i 2008.

Oppslutningen om TIMSS Advanced har vært betydelig lavere enn det vi er vant til i TIMSS. Tabell 12.1 viser de landene som deltok i henholdsvis 1995 og 2008.

Tabell 12.1 Deltakerland i TIMSS Advanced i 1995 og 2008. Landene som deltok begge ganger er gulfarget.

Land	Deltok i 1995	Deltok i 2008
Armenia		x
Australia	(x)	
Canada	x	
Danmark	(x)	
Filippinene		M
Frankrike	x	
Hellas	x	
Iran		x
Israel	(x)	
Italia	M	x
Kypros	x	
Latvia	F	
Libanon		x
Litauen	M	
Nederland		x
Norge	Fm	x
Russland	x	x
Slovenia	(x)	x
Sveits	x	
Sverige	x	x
Tsjekkia	x	
Tyskland	x	
USA	(x)	
Østerrike	(x)	

x : Deltok på ordinær måte i begge fag
(x): Deltok, men med for små utvalg
M: Deltok bare i matematikk
F: Deltok bare i fysikk
Fm: Deltok ordinært i fysikk, men avholdt matematikkstudien i 1998

I 2008 deltok altså 10 land i matematikkstudien og 9 land i fysikkstudien. Fem land deltok i både 1995 (1998) og 2008. For Italia gjelder dette bare matematikk.

Under arbeidet med TIMSS Advanced 2008 har flere land vist økende interesse for studien. Noen har beklaget at de valgte å ikke delta. Det er grunn til å tro at dersom det blir en ny runde med TIMSS Advanced om noen år, vil deltakelsen øke.

Etter hver TIMSS-studie offentliggjøres omfattende rapporter, både nasjonalt og internasjonalt, med primæranalyser av dataene. I etterkant gjøres en rekke sekundæranalyser av de store datamengdene. Disse publiseres på konferanser og i bøker og forskningstidsskrifter. Et eksempel er boka *Contexts of Learning Mathematics and Science* (Howie & Plomp 2006), som inneholder 24 artikler med utgangspunkt i TIMSS og er skrevet av forskere fra 17 land.

12.1.2 Initiativ

Den norske TIMSS-gruppa ved ILS, Universitetet i Oslo, ønsket en ny studie av matematikk- og fysikkspesialistene i slutten av videregående skole. Dette ble tatt opp nasjonalt med Utdanningsdirektoratet og Kunnskapsdepartementet, og internasjonalt med ledelsen for IEA. Kunnskapsdepartementet bevilget ekstramidler til IEA slik at studien kunne gjennomføres. I den internasjonale rapporten takker man for det norske bidraget og viser til at «Funding for this project was provided through a generous grant from the Norwegian Ministry of Education» (Mullis et al., 2009, s. 2).

De norske forskerne sa seg villige til å påta seg sentrale roller i utviklingen av oppgaver for studien. «The TIMSS Norwegian Team is playing a significant role in developing items for TIMSS Advanced.» (Garden et al., 2006, s. 8)

Dette er bakgrunnen for at den internasjonale publiseringen av resultatene i TIMSS Advanced fant sted 9. desember 2009 i Oslo.

12.1.3 Organisering

Det er altså IEA, med hovedkontor i Nederland, som har det overordnede ansvaret for utviklingen og gjennomføringen av alle TIMSS-studiene, deriblant TIMSS Advanced. Det internasjonale prosjektsenteret er lagt til Boston College i USA. Ansvar knyttet til statistisk design og databehandling er delegert til Data Processing and Research Center i Hamburg og Statistics Canada i Ottawa.

I Norge er det Utdanningsdirektoratet som på vegne av Kunnskapsdepartementet har ansvaret for norsk deltakelse og bevilgning av midler. Ansvaret for gjennomføringen og forskning knyttet til studien er delegert til Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo. Prosjektet er der organisert med en prosjektleder og to prosjektgrupper – en i matematikk og en i fysikk – som har arbeidet med TIMSS Advanced i flere år. TIMSS Advanced er tilknyttet Enhet for kvantitative utdanningsanalyser (EKVA) ved ILS. Matematikkgruppa i Norge har samarbeidet med prosjektsenteret i Boston, IEAs sekretariat i Amsterdam, Data Processing and Research Center i Hamburg, Statistics Canada, og med de nasjonale prosjektgruppene i noen av de andre deltakerlandene.

Informasjon om ulike hovedaktører finnes på følgende nettsider:

- IEA: http://www.iea.nl/
- Prosjektsenteret i Boston: http://timssandpirls.bc.edu/
- TIMSS Advanced 2008 internasjonalt: http://timssandpirls.bc.edu/timss_advanced/index.html
- ILS: http://www.ils.uio.no/
- TIMSS i Norge: http://www.timss.no/
- EKVA: http://www.ekva.uio.no/

12.1.4 Populasjoner

Når det gjelder hvilke populasjoner som blir undersøkt, er det viktige forskjeller mellom TIMSS i grunnskolen og TIMSS Advanced i videregående skole. I grunnskolen undersøker TIMSS et representativt utvalg av *hele årskullet* på 4. trinn og på 8. trinn. TIMSS Advanced undersøker betraktelig snevrere grupper, nemlig de elevene på øverste trinn i den videregående skolen som har valgt det eller de kurs som vedkommende land har definert som avansert matematikk eller fysikk. I Norge gjelder det kursene 3MX og 3FY. Elever som tar begge disse kursene tilhører begge populasjonene.

Læreplaner er forskjellige i ulike land. Man skal ikke lære nøyaktig det samme på samme trinn i alle land. Når det gjelder matematikkplanene for 4. trinn er likevel likhetene langt mer slående enn ulikhetene. Det er påfallende samstemmighet i de fleste land om det faglige innholdet i matematikken i barneskolen. Forskjellene blir litt større når vi kommer til 8. trinn, men fortsatt er det stor grad av samsvar. I videregående utdanning øker variasjonene.

Det gjelder for eksempel hvor mye matematikk som er obligatorisk, hvilke kurs som tilbys, hvilket matematisk innhold disse kursene har, hvilke fagkombinasjoner disse kursene eventuelt inngår i, og hvilke kurs som kreves for ulike typer høyere utdanning.

Det er bare elevene som tar de kursene som er definert som avansert matematikk i det enkelte land, som utgjør matematikkpopulasjonen i TIMSS Advanced. Tabell 12.2 viser hvor stor prosentandel denne populasjonen er av årskullet i hvert deltakerland. Det dreier seg ikke om andel av skoleelevene, men om *andel av hele det aktuelle årskullet* i befolkningen. Denne prosentsatsen kalles *dekningsgraden* (*coverage index*) for det enkelte land.

Tabell 12.2 Dekningsgrad: matematikkpopulasjonen i TIMSS Advanced i prosent av hele årskullet.

Land	**Matematikkpopulasjonen i prosent av hele årskullet**
Filippinene	0,7
Russland	1,4
Nederland	3,5
Armenia	4,3
Libanon	5,9
Iran	6,5
Norge	10,9
Sverige	12,8
Italia	19,7
Slovenia	40,5

Det er store variasjoner, fra under 1 % til over 40 %. For Filippinene avspeiler den lave prosentandelen trolig landets mangel på ressurser til videregående utdanning. For Russlands og Nederlands vedkommende er det mer sannsynlig at det er uttrykk for at landet har definert avansert matematikk som det en liten, selektert og elitepreget gruppe elever tar. Det samsvarer også godt med poengskårene til disse to landene. I den andre enden av skalaen finner vi Italia med en dekningsgrad på rundt 20 % og Slovenia med vel 40 %. Skulle vi overført Slovenias prosentsats til Norge, ville det betydd at nesten alle elever på allmennfaglig studieretning skulle ha tatt 3MX, eller i dagens situasjon at nesten alle elever på studieforberedende programmer skulle ha tatt matematikkurset R2. I Norge lyder det helt utenkelig at en så stor andel av elevene skal ta avansert matematikk til topps; men i Slovenia er det altså tilfelle.

At et land har lav dekningsgrad, trenger ikke bety at det har liten spesialisering i matematikk. Det kan tenkes at landet har flere matematikkurs på høyt nivå, men at det bare er det aller mest avanserte kurset som er med i TIMSS Advanced.

Til sammenlikning viser Tabell 12.3 dekningsgraden i fysikk.

Tabell 12.3 Dekningsgrad: fysikkpopulasjonen i TIMSS Advanced i prosent av hele årskullet.

Land	**Fysikkpopulasjonen i prosent av hele årskullet**
Russland	2,6
Nederland	3,4
Italia	3,8
Armenia	4,3
Libanon	5,9
Iran	6,6
Norge	6,8
Slovenia	7,5
Sverige	11,0

I fysikk er forskjellene i dekningsgrad betydelig mindre. Mest iøynefallende er de lave dekningsgradene i fysikk sammenliknet med matematikk i Italia og Slovenia. Disse landene gir mange elever kurs de har definert som avansert matematikk, mens bare en liten andel elever deltar i det de definerer som avansert fysikk. I Russland er situasjonen motsatt, med en dekningsgrad som er nesten dobbelt så stor i fysikk som i matematikk. Dette avspeiler først og fremst forskjeller i hvordan landene har definert populasjonene for TIMSS Advanced. Det kan være at Russland bare tester det mest avanserte kurset de har i begge fag, og at det mest avanserte fysikkurset i Russland ikke er like snevert og elitepreget som det mest avanserte matematikkurset. Kanskje mange av fysikkelevene tar et mindre avansert matematikkurs enn det de tester i TIMSS Advanced, men som likevel kan være på høyt nivå.

Det er for øvrig grunn til å merke seg et annet poeng når det gjelder Norge. Det årskullet som populasjonene i TIMSS Advanced 2008 tilhører, er nettopp det årskullet som utgjorde populasjonen på 8. trinn fem år tidligere i TIMSS 2003. Dette kan også gi et perspektiv på utviklingen over tid.

12.1.5 Analysenivåer

I TIMSS og TIMSS Advanced analyseres data på tre nivåer (se også kapittel 2):

Systemnivå – intendert læreplan

Dette nivået gjelder utdanningssystemet slik det legges til rette av nasjonale og regionale myndigheter i et land. Det dreier seg om organisering av skoletilbudet, rammefaktorer, ressurstilgang og elevenes muligheter til skole- og fagvalg. Ikke minst dreier det seg om læreplaner og vurderingsformer. Det er slike faktorer som forteller hva slags utdanningstilbud samfunnet og myndighetene ønsker og planlegger at elevene skal få.

Opplysninger på dette nivået er primært hentet inn fra de nasjonale prosjektlederne i de enkelte deltakerlandene. Spørreskjemaer til lærerne og skolelederne til de elevene som ble plukket ut til å delta i undersøkelsen, har også gitt nyttig informasjon.

I 2008 ble det utgitt en ensyklopedi med beskrivelser av skolesystemene i alle deltakerlandene i TIMSS 2007 (Mullis et al., 2008). Samtlige deltakerland i TIMSS Advanced 2008, bortsett fra Filippinene, er med der. Selv om hovedvekten i ensyklopedien er på grunnskolen (*primary education* og *lower secondary education*), kan den gi en viss støtte for å forstå ulikheter mellom landene på systemnivået.

Klasseromsnivå – implementert læreplan

Dette nivået handler om hva som skjer i klasserommet, om undervisningen og læringsmiljøet. Hvordan blir intensjonene fra systemnivået omsatt i praksis? Hvordan blir den intenderte læreplanen iverksatt i skolen?

Både elevene, lærerne deres og skolelederne deres har svart på spørreskjemaer om situasjonen på skolen. Elevene ble blant annet spurt om undervisningsmetoder, leksearbeid, hjemmebakgrunn, holdninger og fritidssysler. Lærerne ble blant annet spurt om utdanning, undervisningsmetoder, vurdering, faglige temaer og arbeidssituasjonen. Skolelederne ble blant annet spurt om ressurser og skolemiljø.

Elevnivå – resultert læreplan

Det siste nivået, elevnivået, handler om hva som er oppnådd. Hvilke kunnskaper har elevene i matematikk og fysikk, og hvilke holdninger har de til fagene?

Med data på alle disse nivåene kan man beskrive og analysere situasjonen på en rekke måter. Vi kan studere forandringer i forhold til den forrige TIMSS Advanced-undersøkelsen. Vi kan sammenlikne elevprestasjoner i ulike land. Vi kan sammenlikne prestasjonene til jenter og gutter.

Vi kan også analysere om det synes å være sammenheng mellom prestasjonene og noen av bakgrunnsvariablene, som for eksempel undervisningsmetoder, leksearbeid, lærernes utdanning eller elevenes hjemmebakgrunn.

12.2 Rammeverk og instrumenter

TIMSS baserer seg på et rammeverk som definerer hvilke kunnskaper og ferdigheter elevene skal testes i. Rammeverket er utviklet gjennom en drøftingsprosess mellom deltakerlandene, som leder fram mot konsensus om hva som utgjør sentrale kunnskaper og ferdigheter i faget sett i forhold til de respektive landenes læreplaner. Det foregår en viss justering foran hver undersøkelse, noe som er naturlig ettersom skolesystemer utvikler seg og læreplaner revideres. Men det er samtidig et poeng å holde rammeverket relativt stabilt for å gi et solid fundament for pålitelige sammenlikninger over tid.

12.2.1 Rammeverk

Rammeverket for TIMSS Advanced 2008 (Garden et al., 2006) bygger på rammeverket for TIMSS 1995 (Robitaille et al., 1993). Det er et mål at rammeverket skal ligge så tett som mulig opp til de aktuelle læreplanene i deltakerlandene. Det er selvsagt umulig å få det til fullt ut; til det er læreplanene for ulike, spesielt når man kommer til de høyere trinnene i skoleverket. Derfor blir målet isteden at ikke noe land skal oppleve at det blir et urimelig stort avvik fra deres læreplan. Vi skal helst alle sammen kunne si at testen i hovedsak faller inn under vår læreplan. Samtidig aksepterer vi at noen av oppgavene ikke passer godt i vårt land og at noen deler av vår læreplan ikke dekkes av testen. For å oppnå dette er det viktig at alle deltakerlandene gis anledning til å påvirke prosessen med utvikling av rammeverket, slik at man oppnår konsensus om det.

Rammeverket definerer de *faglige innholdskategoriene* som testoppgavene kan hentes fra. Disse kategoriene er organisert i noen temaområder.

Samtidig oppgis det hvor stor andel av oppgavene som bør høre inn under hver av disse innholdskategoriene.

I tillegg inneholder rammeverket en beskrivelse av *kognitive kategorier*. Det er et mål at oppgavene skal stille ulike kognitive krav til elevene. Derfor angir rammeverket også hvor stor andel av oppgavene som bør ligge i hver av de kognitive kategoriene.

Innholdskategorier i matematikk

Når det gjelder innholdskategoriene for matematikk i rammeverket, er det i TIMSS Advanced 2008 gjort en del forenklinger i forhold til TIMSS 1995. I 1995 var det fem innholdskategorier. Tabell 12.4 viser disse kategoriene og hvor stor andel av oppgavene som tilhørte hver kategori.

Tabell 12.4 Fordeling av matematikkoppgaver i TIMSS Advanced 1995 etter innholdskategorier.

Innholdskategori	Prosentandel av oppgavene
Tall og likninger	26 %
Kalkulus	23 %
Geometri	35 %
Sannsynlighet og statistikk	11 %
Begrunnelse og struktur	5 %

I 1995 var det altså tre store og to små innholdskategorier. Alle oppgavene ble regnet med i skaleringen og beregningen av totalskår for elevene. Men i de statistiske analysene viste det seg at de to siste kategoriene var for små til at man kunne rapportere pålitelig om elevprestasjoner innenfor dem. Derfor ble det bare rapportert om prestasjoner innenfor de tre første, store kategoriene.

Ved utarbeiding av rammeverket for TIMSS Advanced 2008 tok man hensyn til denne erfaringen. Man kunne på ingen måte beholde fem kategorier og rapportere fra samtlige. Fire kategorier ville være maksimum. Kategorien *Begrunnelse og struktur* kunne lett innarbeides i de andre. De tre første kategoriene skulle opplagt beholdes, men med *Algebra* som ny betegnelse på den første istedenfor *Tall og likninger*. Hovedspørsmålet ble om man skulle beholde *Sannsynlighet og statistikk* som kategori. I så fall måtte denne kategorien få betydelig større omfang enn forrige gang, og det måtte skje på bekostning av de andre kategoriene.

I den internasjonale debatten om rammeverket var det skepsis mot å beskjære de tre store innholdskategoriene. Tvert imot så man et behov for å styrke *Algebra* og *Kalkulus* i forhold til 1995. Enda tyngre veide det at omfanget av sannsynlighet og statistikk i landenes læreplaner varierte sterkt. Knapt noen land hadde så mye statistikk som Norge, og enkelte land hadde ikke statistikk i det hele tatt.

Konklusjonen ble at man tok statistikk ut av rammeverket, mens man gjorde rom for litt kombinatorikk og sannsynlighet innenfor *Algebra*. Dermed fikk det nye rammeverket bare tre innholdskategorier. Disse kategoriene med anbefalt fordeling av oppgaver er vist i tabell 12.5.

Tabell 12.5 Fordeling av matematikkoppgaver i TIMSS Advanced 2008 etter innholdskategorier.

Innholdskategori	Anbefalt prosentandel av oppgavene	Faktisk prosentandel av oppgavene
Algebra	35 %	36 %
Kalkulus	35 %	35 %
Geometri	30 %	29 %

Den høyre kolonnen viser at oppgavene i testen faktisk fordelte seg nesten nøyaktig slik som det var planlagt.

Innledningsvis i kapitlene 4, 5 og 6 er det spesifisert litt om hvilke emner som inngår i hver av innholdskategoriene. Fulle detaljer finnes i rammeverket (Garden et al., 2006).

Kognitive kategorier i matematikk

I TIMSS 1995 hadde man følgende kategorisering:

Ferdigheter og prosesser:

- Å vite
- Å bruke rutineprosedyrer
- Å utforske og løse problemer
- Å resonnere matematisk
- Å kommunisere

Denne typen kategorier har gjennomgått en utvikling i rammeverkene til TIMSS-studiene i 2003 og 2007 i grunnskolen. I tråd med denne utviklingen definerte rammeverket for TIMSS Advanced 2008 tre kognitive kategorier og anbefalte en fordeling av oppgavene på disse, slik det er vist i tabell 12.6.

Tabell 12.6 Fordeling av matematikkoppgaver i TIMSS Advanced 2008 etter kognitive kategorier.

Kognitiv kategori	Anbefalt prosentandel av oppgavene	Faktisk prosentandel av oppgavene
Kunne	35 %	39 %
Anvende	35 %	38 %
Resonnere	30 %	24 %

Å *kunne* betyr blant annet å huske fakta, å gjenkjenne objekter og uttrykk, å beherske algoritmer (som for eksempel løsing av standard likninger og derivasjon av standard funksjoner), og å hente informasjon fra grafer og tabeller. Å *anvende* betyr å bruke kunnskapene og ferdighetene sine til å velge metoder og strategier, å representere matematisk informasjon på ulike måter, å modellere situasjoner, og å løse rutineoppgaver. Å *resonnere* betyr å tenke logisk, å analysere informasjon og trekke gyldige konklusjoner, å generalisere resultater, å kombinere matematiske ideer, kunnskaper og ferdigheter, å begrunne påstander ut fra matematiske resultater og egenskaper, og å løse komplekse problemer som ikke er rutinepreget, både i ren-matematiske og anvendte sammenhenger.

Den faktiske fordelingen av oppgavene i testen på de ulike kognitive kategoriene kan tyde på at det er vanskeligere å lage gode resonneringsoppgaver til en slik test enn gode faktakunnskaps- og anvendelsesoppgaver. Dessuten er det vanskeligere å oppnå internasjonal enighet om den kognitive kategoriseringen enn den innholdsmessige. En oppgave som er klart rutinepreget i ett land – ut fra deres læreplan og undervisningstradisjoner – kan vurderes som en krevende problemløsingsoppgave med store utfordringer til resonnement i et annet land. Av den grunn har vi i denne boka valgt å legge liten vekt på å analysere resultatene i TIMSS Advanced basert på den internasjonale kategoriseringen av oppgavenes kognitive nivå.

Kalkulator

I TIMSS for grunnskolen er kalkulator ikke tillatt på 4. trinn. Kalkulatorbruk på 8. trinn har derimot vært gjenstand for omfattende debatt. Man laget mange oppgaver slik at kalkulator ikke ville være til nytte, mens andre oppgaver krevde direkte utregninger der kalkulator kunne gi en fordel. Dels på grunn av pedagogiske synspunkter og dels på grunn av ressursforskjeller er det svært store ulikheter mellom landene når det gjelder elevers tilgang til kalkulatorer til bruk i undervisningen på skolen og i hjemmearbeidet med matematikk.

I TIMSS 2003 førte dette til en ekstra studie knyttet til testen på 8. trinn. Elevene der fikk ikke bruke kalkulator på første del av testen, men fikk lov på siste del. Enhver oppgave var plassert i første del av noen oppgavehefter og i siste del av andre hefter. Dermed kunne man analysere effekten av å ha tilgang til kalkulator. Kalkulatorbruk ga signifikant utslag på prestasjonen på bare fem av i alt 194 oppgaver. Internasjonalt hadde 63 % av elevene tilgang til kalkulator under testen, men bare 15 % oppga at de hadde brukt den en del eller mye. I Norge hadde 80 % av elevene tilgang til kalkulator, men bare 8 % oppga at de hadde brukt den en del eller mye.

Med utgangspunkt i denne erfaringen ble det bestemt at kalkulatorbruk skulle være tillatt under hele testen på 8. årstrinn i TIMSS 2007. Dermed slapp elever som var vant til utstrakt kalkulatorbruk å føle at de ble satt i en uvant testsituasjon. Men mange oppgaver var konstruert slik at det ikke lå til rette for enkel kalkulatorbruk.

I TIMSS Advanced i 1995 var kalkulator tillatt. Det ble tidlig bestemt at kalkulator skulle være tillatt i 2008 også. En grunn for å tillate kalkulator var, som på 8. trinn, at elevene skulle kunne møte testen med samme rammebetingelser som de er vant til fra prøver og eksamener i egen skolegang. Flere land har utstrakt bruk av kalkulator, til dels av avansert type, mens andre knapt bruker kalkulator i det hele tatt. En annen begrunnelse var at for å kunne sammenlikne prestasjoner i 1995 og 2008, var det viktig å ha samme testbetingelser. Den norske prosjektgruppa problematiserte dette argumentet ved å påpeke den enorme teknologiske utviklingen i løpet av årene som var gått mellom de to undersøkelsene. Kalkulatorer som er i vanlig bruk i undervisningen i en del land nå, kan knapt sammenliknes med de som var vanlige i 1995. Rammeverket erkjenner denne problematikken: «it is noted that there have been tremendous changes in calculator technology since 1995» (Garden et al., 2006, s. 16).

Innspill fra norsk side førte til at en rekke oppgaver fikk spesielle koder for å avdekke bruk av kalkulator. I kommentarene til de frigitte oppgavene i kapitlene 4, 5 og 6 drøftes elevenes kalkulatorbruk i flere tilfeller.

12.2.2 TIMSS Advanced og norske læreplaner

Et av målene med rammeverket for TIMSS Advanced er – som nevnt i det foregående – å sikre at elevene i ethvert deltakerland blir testet i oppgaver som i hovedsak faller innenfor landets læreplan. På grunn av de mange forskjellene vil det alltid være en del oppgaver som ikke passer i det enkelte land, men litt upresist kan man formulere det som et mål at testen skal være omtrent like «rettferdig» eller «urettferdig» i alle land.

Det matematiske innholdet i TIMSS Advanced er sammenliknet med de enkelte lands læreplaner på to måter. For det første er innholdsbeskrivelsen i rammeverket holdt opp mot læreplanen. Som vi har skrevet innledningsvis i delkapittel 12.2.1 ovenfor, er hver innholdskategori definert ved beskrivelse av en del faglige temaområder. Algebra har 10, Kalkulus 9 og Geometri 8 slike temaområder, det vil si 27 i alt. Tabell 12.7 viser hvordan sammenlikningene har falt ut for deltakerlandene. Siden ethvert temaområde består av flere enkelttemaer, kan det være vanskelig å avgjøre om et område i hovedsak faller inn under landets læreplan eller ikke. Resultatene i tabellen bygger derfor på en viss bruk av skjønn.

Tabell 12.7 Antall temaområder i rammeverket til TIMSS Advanced som faller inn under landenes læreplaner.

Land	**Totalt 27 temaområder**	**Algebra 10 temaområder**	**Kalkulus 9 temaområder**	**Geometri 8 temaområder**
Armenia	22	9	5	8
Filippinene	25	9	9	7
Iran	26	9	9	8
Italia	26	9	9	8
Libanon	27	10	9	8
Nederland	20	9	7	4
Norge	25	9	9	7
Russland	25	8	9	8
Slovenia	25	10	8	7
Sverige	19	8	7	4

Vi ser at Sverige, Nederland og Armenia har de største uoverensstemmelsene mellom rammeverk og læreplan. For Sverige og Nederland ligger uoverensstemmelsene fortrinnsvis innenfor Geometri, mens de for Armenia ligger innenfor Kalkulus. De øvrige landene, deriblant Norge, har stort samsvar mellom rammeverk og læreplan.

Merk at tabell 12.7 antyder hvor godt rammeverket til TIMSS Advanced passer til et lands læreplan. Den viser derimot ikke det omvendte, nemlig hvor godt landets læreplan passer til rammeverket. Det vil si at dersom et faglig tema i rammeverket ikke er med i et lands læreplan, så fanges det opp i tabellen. Men hvis det er temaer i landets læreplan som ikke er med i rammeverket, så vises det ikke. Et eksempel på dette er statistikkdelen av den norske læreplanen for MX-kursene.

I tillegg til denne sammenlikningen er hver enkelt matematikkoppgave i TIMSS Advanced 2008 vurdert opp mot læreplanen i det enkelte land. Slik er det registrert hvilke av oppgavene i testen som er dekket av læreplanen og hvilke som må sies å ligge utenfor.

De norske populasjonene i TIMSS Advanced våren 2008 tilhørte det årskullet som var det aller siste som *ikke* hadde gått over til det nye læreplanverket LK06 som ble innført fra 2006 i den gjennomgripende reformen *Kunnskapsløftet*. Vi har derfor vurdert testoppgavene i forhold til disse elevenes læreplan, som tilhørte *Reform 94*. Det viktig å være klar over den spesielle situasjonen matematikkplanene hadde i R94. Da utdanningsmyndighetene tidlig på 1990-tallet startet opp med en storstilt reform av det norske skolesystemet, valgte de å begynne med videregående opplæring. Slik fikk vi læreplanverket R94. Deretter fulgte en tilsvarende reform av grunnskolen med læreplanverket L97 tre år senere. Da matematikkplanene i L97 ble ferdigstilt, var det åpenbart at matematikkfagene på videregående trinn ikke lenger bygde på grunnskolematematikken. Derfor ble matematikkplanene i R94 revidert med virkning fra 2000. For mer om dette se vedlegget bakerst i boka.

Oppgavene i TIMSS Advanced 2008 er sammenliknet med den reviderte læreplanen for 2MX og 3MX fra 2000. Samtidig må vi huske at de norske elevene som ble testet i den første TIMSS Advanced-studien i 1998 ble undervist etter de opprinnelige R94-planene. Når vi foretar trendanalyser, sammenlikner vi altså prestasjonene til elevgrupper som har vært undervist under ulike læreplaner for MX-kursene. Dette er påpekt i en del av kommentarene i denne boka, spesielt i kapitlene 4, 5 og 6, der vi drøfter resultatene på de frigitte oppgavene.

Tabell 12.8 viser sammenhengen mellom oppgavene og læreplanene, og hvilke utslag dette har gitt for prestasjonene.

Tabell 12.8 Samsvar mellom oppgavene i TIMSS Advanced 2008 og landenes læreplaner. Prosent riktig på hele testen og på den delen av testen som faller innenfor det enkelte lands læreplan.

Land	**Antall poeng* innenfor læreplanen (av 79 poeng totalt)**	**Gjennomsnittlig prosent riktig på hele testen**	**Gjennomsnittlig prosent riktig på «egen del» av testen**
Russland	79	57	57
Nederland	72	54	56
Libanon	76	53	54
Iran	76	43	44
Slovenia	73	36	37
Italia	74	35	36
Norge	73	33	34
Armenia	66	32	36
Sverige	64	31	33
Filippinene	79	24	24

** De aller fleste oppgavene i testen har ett oppnåelig poeng, mens noen få oppgaver har to poeng. Derfor er totalt antall oppnåelige poeng litt større enn antall oppgaver.*

Når vi sammenlikner testoppgavene med landenes læreplaner på denne måten, er det Sverige og Armenia som kommer dårligst ut. – De to siste kolonnene viser hvor godt landene i gjennomsnitt gjorde det på hele testen, og hvor godt de gjorde det på den delen av testen som lå innenfor egen læreplan. Her ser vi at det bare er Armenia som har mer enn 2 prosentpoengs forbedring når de begrenser testen til «sin egen del» av den, og selv de har bare 4 prosentpoengs forskjell. Norske elever skåret i gjennomsnitt 33 % korrekt på testen i sin helhet. Dersom vi begrenser testen til de oppgavene som ligger innenfor den norske læreplanen, så går den norske skåren opp til 34 % korrekt. Det er med andre ord lite grunnlag for å hevde at de oppgavene norske elever ikke er blitt undervist i – som for eksempel oppgaver om komplekse tall – «ødelegger» den norske prestasjonen. Vi ser at dette gjelder TIMSS Advanced generelt.

Tilsvarende analyse ble gjort for TIMSS 2007 (Onstad & Grønmo, 2009). Resultatet var det samme: Den norske prestasjonen gikk opp med 1 prosentpoeng i både matematikk og naturfag på 4. trinn, og med 2 prosentpoeng i både matematikk og naturfag på 8. trinn. Dette viser at TIMSS-testene er ganske robuste mot moderate variasjoner i hvor godt læreplanene dekker testen. Dette henger sammen med den grundige prosessen med utvikling av rammeverk for studiene, og med det store antallet oppgaver som brukes i testene.

12.2.3 Oppgaver

Når TIMSS utvikler oppgaver til undersøkelsene sine, tar de mange hensyn (Mullis et al., 2005):

- Oppgavene skal ligge innenfor læreplanen i de fleste deltakerlandene.
- Oppgavene skal forventes å kunne forsvare sin posisjon i en framtidig utvikling av matematikk (og naturfag) i skolen.
- Oppgavene skal være godt tilpasset de deltakende elevenes alderstrinn.
- Oppgavene skal fungere teknisk godt i en storskalaundersøkelse.
- Oppgavene skal fordele seg på innholdskategoriene og de kognitive kategoriene i samsvar med prosentangivelsene i rammeverket. (Se delkapittel 12.2.1.)

Oppgavene skal også fungere relativt godt i alle land, basert på resultatene fra piloteringen som gjennomføres året før hovedundersøkelsen. Videre er det et mål å få en balansert fordeling mellom flervalgsoppgaver og åpne oppgaver.

Punktet om å «fungere teknisk godt» betyr blant annet at en oppgave skal *diskriminere* godt, det vil si at den skal skille mellom sterke og svake elever. For å kunne få høy reliabilitet på testen som helhet, er det i tillegg viktig å ha oppgaver med ulik vanskegrad.

TIMSS Advanced er en *trendstudie*. Det betyr at den legger til rette for sammenlikning over tid. Et utvalg av oppgavene i TIMSS Advanced 1995 ble ikke offentliggjort, men lagt til side for gjenbruk i den neste TIMSS Advanced-studien. Dette er *trendoppgavene*, som knytter de to studiene sammen og gjør det mulig å sammenlikne prestasjonene.

Trendoppgavene fra TIMSS Advanced 1995 lå altså fastlagt som et utgangspunkt. Deretter var det behov for å utvikle mange nye oppgaver, slik at det samlede oppgavetilfanget fylte kriteriene ovenfor. Deltakerlandene ble invitert til å sende inn forslag til nye oppgaver. Oppgaveforslagene ble sendt til en internasjonal ekspertkomité hvor de ble vurdert mot rammeverket. Lå en oppgave utenfor rammeverket, ble den modifisert eller forkastet. Falt den innenfor, ble den plassert i en innholdskategori og en kognitiv kategori. Den internasjonale ekspertkomiteen hadde ansvaret for at det var tilstrekkelig med oppgaver innen de ulike faglige og kognitive områdene, at det var en akseptabel fordeling i oppgavenes vanskegrad, og at det var et passende forhold mellom flervalgsoppgaver og åpne oppgaver. Den hadde også ansvaret for beskrivelsene av de ulike kompetansenivåene. Norske forskere deltok aktivt i dette arbeidet. Fire av i alt åtte personer i TIMSS Advanced 2008 Task Force var norske, to i matematikk og to i fysikk (Mullis et al., 2009, s. 433).

Den store «oppgavebanken» som ble utviklet på denne måten, ble så grundig gjennomgått. Fra denne valgte man ut omtrent dobbelt så mange oppgaver som man trengte til testen. Disse oppgavene ble utprøvd internasjonalt våren 2007. Resultatene i denne pilottesten ga grunnlag for å gjøre det endelige utvalget av oppgaver til selve TIMSS Advanced-undersøkelsen i 2008. Oppgaveutvalget ble diskutert internasjonalt med representanter fra alle deltakerlandene. Utvalget skulle oppfylle de fastsatte fordelingene på innholdskategorier og kognitive kategorier.

De utvalgte oppgavene ble fordelt i 7 såkalte *blokker*. En blokk besto enten av trendoppgaver fra TIMSS Advanced 1995 eller av nye oppgaver som var prøvd ut i pilottesten. Blokkene var relativt like i arbeidsmengde og vanskegrad. Hver blokk hadde omtrent 10 oppgaver og var anslått til å kreve 30 minutters arbeid for elevene.

Noen av de blokkene som ble brukt i TIMSS Advanced 2008, vil foreløpig ikke bli frigitt. Det drøftes planer om en ny TIMSS Advanced-undersøkelse om noen år, derfor hemmeligholder man oppgaver som kan brukes som trendoppgaver i neste studie.

12.2.4 Koder

Mange av oppgavene i TIMSS Advanced er *flervalgsoppgaver*. I de nye oppgavene i TIMSS 2008 fikk elevene fire svaralternativer å velge mellom: A, B, C eller D. I TIMSS 1995 var det fem svaralternativer. Av den grunn fikk elevene i TIMSS 2008 noen oppgaver med fem svaralternativer (trendoppgavene), andre med fire svaralternativer (nye oppgaver). I begge tilfellene skal elevene markere hvilket av svarene som hun eller han mener eller tror er det riktige.

Det ligger et grundig arbeid bak konstruksjon av flervalgsoppgaver. Det er viktig at bare ett av svaralternativene er riktig, og at ingen av de andre er det. De gale alternativene kalles *distraktorer*. Gode distraktorer bør avspeile typiske misoppfatninger, regnefeil eller liknende. En distraktor som ikke velges av noen av elevene, er ikke ønskelig. Det er heller ikke ønskelig at en distraktor skal «lokke» eller «lure» elevene til å gi galt svar. For å finne gode distraktorer prøver man ofte ut oppgavene som åpne oppgaver først. De elevsvarene man da får, danner utgangspunkt for konstruksjon av distraktorer.

En flervalgsoppgave er enkel å kode etterpå. Det er én tallkode for hvert av svarene A, B, C og D (og eventuelt E). Det er også spesielle koder for elever som har svart på en gal måte – for eksempel markert to svar – eller ikke svart i det hele tatt. Disse kodene registreres i en database som deretter kan behandles med statistisk programvare.

For de *åpne oppgavene* er kodingen mye mer krevende. Åpne oppgaver kalles *constructed response items* på engelsk. Det er altså oppgaver hvor eleven ikke skal velge mellom ferdig-formulerte svarforslag, men må formulere svaret selv. Svaret som kreves, kan være av ulikt format. Det kan for eksempel dreie seg om å skrive ned bare et tall eller et ord, eller oppgaven kan kreve at eleven viser utregningen, redegjør for framgangsmåten, gir en begrunnelse eller forklarer et resonnement.

Gjennom utprøving av oppgavene danner man seg et inntrykk av hvordan de blir besvart. Dersom det viser seg at det er noen karakteristiske forskjeller mellom svarene, kan det ha diagnostisk interesse å gi visse svarkategorier særskilte koder. Det kan gi mulighet til å analysere både *hva* og *hvordan* elevene har svart på oppgaven. I TIMSS har man utviklet et tosifret kodesystem for å ta vare på slik informasjon. Norske forskere sto sentralt i denne utviklingen (se Lie, Angell & Rohatgi, 2010, s. 42).

Hvis en oppgave bare har ett riktig svar, gis det kode 10 for dette svaret. Dersom det er flere svar som anses som korrekte, eller dersom det er ulike måter å komme fram til svaret på, er det mulig å kode med for eksempel 10, 11 og 12. Hver kode er definert gjennom en beskrivelse (og eventuelt eksemplifisering) av hvilke typer elevsvar som skal falle inn under denne koden. Feilsvar kodes konsekvent på 70-tallet. Dersom det er interessant å skille mellom ulike feilsvar, kan de gis kode 70, 71 osv. Alle andre feilsvar får kode 79. Helt blanke oppgaver får kode 99.

Riktig svar på en slik oppgave gir *ett poeng*.

Noen oppgaver er mer komplekse, og det er naturlig å kunne skille mellom helt eller delvis riktig svar. Da vil kodene 20, 21, 22 osv. betegne ulike typer korrekte svar, mens 10, 11, 12 osv. betegner ulike typer delvis korrekte svar.

Helt riktig svar på en slik oppgave gir *to poeng*, mens delvis riktig svar gir ett poeng.

Poengene gir grunnlag for å beregne prestasjonene, mens kodene for øvrig muliggjør nærmere studier av elevenes kunnskaper og strategivalg. For eksempel kan slike koder i noen av oppgavene gi mulighet til å studere i hvilken grad og på hvilke måter elevene har brukt kalkulator.

12.2.5 Spørreskjemaer

Hver elev som deltok i TIMSS Advanced 2008, svarte på et *elevspørreskjema* i tillegg til den faglige testen. Lærerne til disse elevene fikk dessuten et eget *lærerspørreskjema*, og skolens ledelse fikk et *skolespørreskjema*. Gjennom skjemaene ble det samlet inn en rekke opplysninger om holdninger, hjemmebakgrunn, undervisningsmetoder, leksearbeid, skolens ressurser med mer.

Spørreskjemaene i TIMSS Advanced 2008 gikk også gjennom en ekspertvurdering og en grundig internasjonal debatt før de ble ferdigstilt. Alle deltakerlandene hadde en demokratisk mulighet til å foreslå endringer og tillegg.

Det var mulig for land å sløyfe enkelte spørsmål som ble ansett som irrelevante for deres utdanningssystem, eller å legge til spørsmål som utdanningsmyndighetene eller den nasjonale prosjektgruppa fant interessante. Dette ble imidlertid gjort i liten grad. Svarene på slike spørsmål ble ikke tatt med i den internasjonale rapporten.

12.2.6 Oversetting

Det internasjonale arbeids- og samarbeidsspråket i TIMSS er engelsk. Alle offisielle dokumenter, instruksjoner, oppgaver og spørreskjemaer foreligger på engelsk. Men når undersøkelsen gjennomføres, må oppgavene og spørreskjemaene foreligge på de språkene som brukes i skolene i de respektive landene. Elevene, lærerne og skolelederne skal møte oppgavene og spørsmålene på et språk de er vant til, ellers vil internasjonale sammenlikninger gi liten mening.

Oversetting er imidlertid vanskelig. For det første må det sikres at det spørres om nøyaktig det samme på alle språk. Videre bør oppgavene være like vanskelige, noe som ikke er opplagt når de reformuleres på et nytt språk. Et eksempel fra biologi kan belyse dette. Spørsmålet «What does a carnivore eat?» oversettes naturlig til «Hva spiser en kjøtteter?» på norsk. Vi ser at mens engelsk bruker et vanskelig fremmedord, bruker norsk et selvforklarende ord. Det norske spørsmålet blir dermed lettere enn det engelske. Det fins også eksempler på det motsatte, at engelsk fagterminologi ligger nærmere allmennspråket enn tilsvarende norske faguttrykk gjør. «Multiply» inngår i engelsk hverdagsspråk og kan bety «mangfoldiggjøre» eller «formere seg», mens «multiplisere» knapt brukes utenfor matematikken på norsk. En regulær trekant vil på enkelte språk kalles «likesidet» og på andre språk «likevinklet». Å være likesidet eller likevinklet er ekvivalent for trekanter (men ikke for firkanter!). Det er like fullt to ulike opplysninger om trekanten som formidles gjennom disse betegnelsene, og i noen oppgaver kan det spille en rolle for løsningen.

I tillegg vil skifte av språk mange ganger gå sammen med skifte av kultur, tradisjoner, miljø og erfaringsverden. Slike ting kan også spille en rolle for hvordan situasjoner og spørsmål oppfattes. Sammen med oversettingen bør man derfor være oppmerksom på om dette kan skape ulikheter mellom elevene i forskjellige land. En matematisk modell for isbjørn-populasjoner kan virke mer fremmedartet i Afrika enn i Norge.

TIMSS har omfattende rutiner for oversetting. I Norge oversetter den norske prosjektgruppa oppgavene, spørreskjemaene og instruksjonene fra engelsk til bokmål. Dette blir gjort av to personer som arbeider uavhengig av hverandre. Etterpå blir de to oversettelsene sammenholdt, grundig diskutert og satt sammen til ett utkast. Bokmålstekstene sendes til en språkkonsulent som oversetter dem til nynorsk. Bokmål- og nynorskversjonene blir så sammenliknet av prosjektgruppa, og det blir foretatt en del justeringer for å harmonisere uttrykksmåtene på de to målformene. Etter dette sendes oversettelsesforslagene til IEA, som sender dem videre til en bokmålekspert og en nynorskekspert som er uavhengige av prosjektgruppa i Norge. Kommentarene og forslagene fra disse ekspertene sendes via IEA til Norge, der prosjektgruppa gjennomgår dem, vurderer dem fra en faglig og språklig synsvinkel og foretar nødvendige forbedringer av tekstene.

Det er også viktig at layout på oppgaver og hefter er så lik som mulig i alle land. Alle heftene sendes derfor til internasjonal godkjenning av layout før de trykkes.

12.2.7 Hefter

Oppgavene ble, som nevnt ovenfor, fordelt i 7 blokker. Blokkene hadde omtrent like mange oppgaver og like stor vanskegrad og arbeidsmengde. Blokkene ble kalt M1, M2, ..., M7. Blokkene M1, M2 og M3 hadde alle blitt brukt i 1995. De inneholdt trendoppgavene. Blokkene M4, M5, M6 og M7 inneholdt nye oppgaver til studien i 2008.

Den totale arbeidsmengden for alle blokkene ville bli alt for stor for en enkelt elev. Det er behov for å bruke mange oppgaver for å gi en bred dekning av innholdskategoriene i rammeverket og læreplanene i deltakerlandene. Den enkelte elev får bare et utvalg av alle oppgavene som er med i testen. Blokkene er fordelt på fire forskjellige hefter. Hvert hefte inneholdt tre blokker, som tilsvarte en estimert samlet arbeidsmengde på halvannen time. Tabell 12.9 viser hvordan blokkene ble fordelt på heftene.

Tabell 12.9 Fordeling av blokker i hefter.

Hefter	Blokker		
Hefte 1	M1	M2	M3
Hefte 2	M4	M3	M5
Hefte 3	M6	M4	M1
Hefte 4	M2	M5	M7

Hefte 1 besto av bare trendoppgaver og var identisk med et av heftene i 1995-studien. De andre heftene hadde én trendblokk hver og to nye blokker. De fem første blokkene forekom i to hefter hver, mens de to siste blokkene bare var med i ett hefte hver. Alle blokker som forekom i to ulike hefter, hadde forskjellig plassering i de to heftene. Dette gjøres fordi elevenes prestasjoner kan påvirkes av om oppgaven ligger tidlig eller sent i heftet. På slutten av en test er ofte elevene mer slitne.

Hver elev fikk altså ett hefte. Den enkelte elev fikk dermed prøve seg på mindre enn halvparten av oppgavene i studien. TIMSS Advanced er derfor lite egnet til å si noe om den enkelte elev; studien er designet for å kunne trekke relativt sikre konklusjoner om den nasjonale populasjonen eller deler av denne.

Det finnes tre typer nummerering av oppgavene i TIMSS Advanced. La oss ta et eksempel: en oppgave om en regulær mangekant som er innskrevet i en sirkel. (Denne oppgaven er presentert og drøftet som Algebraoppgave 3 i kapittel 4.) Da den ble foreslått og kom inn i oppgavebanken til TIMSS, fikk den et referansenummer: MA13027. Dette referansenummeret er en entydig identifikasjon av oppgaven i TIMSS-systemet, noe som er nyttig for forskere som skal bruke eller analysere TIMSS-oppgaver. Da oppgaven ble valgt ut til å være med i TIMSS-testen i 2008, ble den plassert i en blokk og fikk nummerkoden M3_07 i tillegg til referansenummeret. Hvis oppgaven er en trendoppgave som er med i flere studier, kan denne nummerkoden variere. Nummerkoden forteller at oppgaven i studien i 2008 er plassert som den sjuende oppgaven i blokk M3. Denne blokken er plassert i hefte 1 og hefte 2, slik vi så ovenfor. I heftene er oppgavene fortløpende nummerert. Oppgaven er nummer 27 i hefte 1 og nummer 18 i hefte 2.

I denne boka har vi brukt vår egen fortløpende nummerering av de oppgavene vi har valgt å presentere i kapitlene 4, 5 og 6, og i tillegg har vi oppgitt referansenummeret til hver av disse oppgavene. Det siste er gjort med tanke på forskere som ønsker å gjøre egne analyser eller studere resultatene nærmere.

Alle oppgaveheftene i TIMSS inneholdt en kortfattet instruksjon til elevene om hvordan de ulike oppgavetypene – det vil si flervalgsoppgaver og åpne oppgaver – skulle besvares. Det var en kort formelsamling i begynnelsen av hvert hefte.

12.3 Gjennomføring

TIMSS har utviklet grundige prosedyrer for å sikre en ensartet gjennomføring av undersøkelsen i alle deltakerlandene. Prosedyrene er nøye beskrevet i manualer for gjennomføringen av ulike deler av studien. Se også den internasjonale tekniske rapporten (Arora et al., 2009).

12.3.1 Tidspunkt

TIMSS-undersøkelsen skulle gjennomføres i slutten av det siste året i videregående skole. Det betydde våren 2008 innenfor tidsrammer som var fastsatt sentralt.

12.3.2 Utvalg

Bare et utvalg av elevene i hvert deltakerland blir testet. Dette utvalget trekkes ut etter bestemte statistiske regler og prosedyrer. For å kunne gjøre generaliseringer fra utvalget til hele populasjonen med liten usikkerhet (små feilmarginer), ble det satt som mål at utvalgene skulle omfatte 120 skoler og 2000 elever. Dette målet gjaldt alle land. At kravet til utvalgsstørrelsen er uavhengig av størrelsen på populasjonen, kan begrunnes statistisk, men vi går ikke inn på det her. For små land kunne disse målene ikke nås, og prosedyrer og mål måtte modifiseres. Av de 240 aktuelle videregående skolene i Norge ble 120 trukket ut til å delta i matematikk, og den andre halvparten i fysikk. Den norske prosjektgruppa fant det ikke ønskelig at skoler skulle bes om å delta i begge studiene. Det ville lett føre til at samme elev måtte delta i begge studiene, siden svært mange av fysikkelevene også tar matematikk. Det ville være en urimelig belastning relativt kort tid før avsluttende eksamen.

Den nasjonale prosjektgruppa kontaktet alle de uttrukne skolene med en oppfordring om å delta i undersøkelsen. I Norge var denne henvendelsen ledsaget av anbefalingsbrev fra Utdanningsdirektoratet og fra Utdanningsforbundet.

Av de 120 skolene som ble bedt om å delta i matematikk, var det 107 som svarte ja. På små skoler ble alle elevene bedt om å delta, mens på store skoler ble noen av 3MX-gruppene trukket ut tilfeldig. På de 107 skolene deltok til sammen 1932 elever i undersøkelsen.

TIMSS hadde detaljerte regler for hvordan disse utvalgene skulle trekkes. I tillegg var det strenge krav til deltakelsesprosentene for å anerkjenne utvalgene som *representative*. Norge tilfredsstilte disse kravene.

Dersom et utvalg er trukket *tilfeldig* og har en viss størrelse, regnes det som *representativt*, det vil si at det avspeiler situasjonen i hele populasjonen. I vårt tilfelle ville tilfeldig utvalg bety at enhver 3MX-elev i landet hadde samme sannsynlighet for å bli med i utvalget. Dette var ikke tilfelle i TIMSS Advanced. Skolene hadde ikke samme sannsynlighet for å bli trukket ut, siden skoler som ikke hadde 3FY nødvendigvis måtte være med i matematikkutvalget. Dessuten var det ulikt antall elever fra skole til skole. Men i etterkant var det mulig å beregne hvor stor sannsynligheten for å bli trukket ut hadde vært for hver enkelt elev i utvalget. Disse sannsynlighetene ble brukt til å beregne hvor mange elever i populasjonen den enkelte elev i utvalget kunne sies å representere. Dermed kunne elevene tildeles *vekter* som tilsvarte denne representativiteten. På tilsvarende måte ble det beregnet vekter for skolene i utvalgene. Dataanalysene benyttet disse vektene.

På denne måten fikk vi et representativt utvalg av skoler og et representativt utvalg av elever. Utvalget av lærere ble derimot *ikke* trukket tilfeldig. Lærerne fulgte med som et «attributt» til elevutvalget – det var de utvalgte klassenes lærere som deltok i undersøkelsen. Strengt tatt betyr det at lærerutvalget ikke med sikkerhet kan anses som representativt for hele lærerpopulasjonen; det er derfor litt mer usikkert å generalisere fra det. Men siden lærerutvalget omfatter så mange av 3MX-lærerne – og det er et biprodukt av en tilfeldig utvalgsprosess – kan det vanskelig tenkes betydelige feilutslag om man antar at de på en god måte representerer samtlige lærere i dette faget. Vi kan anse lærerutvalget som «tilstrekkelig tilfeldig» til at vi kan generalisere fra det. Derfor har vi i denne boka tillatt oss å bruke uttrykk av typen «23 % av de norske 3MX-lærerne» og liknende uttrykksmåter når vi strengt tatt burde ha skrevet «lærerne til 23 % av 3MX-elevene i Norge».

Vektingen av dataene ble beregnet av datasenteret til IEA. Dette er beskrevet i den internasjonale tekniske rapporten til TIMSS Advanced 2008 (Arora et al., 2009).

Skolene som hadde sagt seg villig til å delta, sendte inn anonymiserte lister over de uttrukne elevene. Prosjektgruppa brukte et dataprogram spesiallaget for TIMSS Advanced til å trekke ut hvilken elev som skulle ha hvilket oppgavehefte.

12.3.3 Gjennomføring på skolene

TIMSS hadde sentralt utarbeidet detaljerte instrukser for hvordan testen skulle gjennomføres i klasserommet. Det var gjort for å sikre like testvilkår for alle elever, både nasjonalt og internasjonalt.

Alt materiell ble sendt til skolene litt før undersøkelsen skulle gjennomføres. Materiellet besto av oppgavehefter til elevene og spørreskjemaer til elevene, lærerne og skolen, samt instrukser for gjennomføringen. En av de tilsatte på skolen var ansvarlig for å sette seg inn i instruksene på forhånd og å påse at de ble fulgt nøye.

På testdagen ble 3MX-gruppen(e) samlet i klasserommet eller et annet egnet rom. Elevene fikk hvert sitt oppgavehefte. Hvem som skulle ha hvilket hefte, var angitt med en kodet klistrelapp foran på heftet. Dersom en elev ikke møtte, ble vedkommendes hefte inndratt. Dersom en frammøtt elev burde ha tilhørt utvalget, men ikke var registrert, ble vedkommende registrert og fikk et ekstrahefte som var klargjort for slik bruk. Elevene fikk ikke lov til å åpne heftene før de fikk beskjed om å gjøre det.

Elevene fikk opplest informasjon om testen og om gjennomføringen, og eksemplene forrest i heftene ble gjennomgått. Deretter fikk de nøyaktig 90 minutter til å løse oppgavene. Etterpå besvarte elevene spørreskjemaet.

Den internasjonale TIMSS-ledelsen hadde knyttet til seg én person i hvert land som kontrollerte gjennomføringen på en del tilfeldig valgte skoler. Vedkommende var uavhengig av den nasjonale prosjektgruppa og rapporterte direkte til den internasjonale ledelsen ved hjelp av et grundig rapporteringsskjema.

Den ansvarlige personen for gjennomføringen på den enkelte skole sørget for at lærerskjemaene og skoleskjemaet ble utfylt, og sendte deretter alt materiellet tilbake til den nasjonale prosjektgruppa. Det ble kontrollert at ingen oppgavehefter forsvant i prosessen.

12.3.4 Koding

All informasjon fra oppgaveheftene og de ulike spørreskjemaene ble registrert i en databank. I prinsippet er det enkelt å kode svarene på flervalgsoppgavene og på spørsmålene i spørreskjemaene. Da skal det bare registreres hvilket svaralternativ vedkommende har valgt. På den annen side er det selvsagt mulig å gjøre tastefeil ved innskrivingen. Det ble tatt en rekke stikkprøver for å kontrollere dette.

Når det gjelder de åpne oppgavene er situasjonen mer krevende, noe som går fram av redegjørelsen for kodesystemet i delkapittel 12.2.4 ovenfor. Koden settes altså etter en subjektiv vurdering av elevens svar. Skal analyser av elevprestasjonene være pålitelige (reliable), må denne kodingen av åpne oppgaver utføres så likt som mulig av alle kodere i samtlige deltakerland. Det nedlegges et stort arbeid for å sikre dette best mulig. De tillatte kodene på en oppgave er utførlig beskrevet i det internasjonale kodematerialet. Dette materialet var grundig gjennomgått på en internasjonal samling. I det enkelte land ble kodedefinisjonene nøye gjennomgått i fellesskap før kodingen startet. Eventuelle uklarheter ble drøftet og avklart, i noen tilfeller i samråd med den internasjonale TIMSS-ledelsen. For mange av oppgavene var det utarbeidet et eksempelmateriell som illustrerte hvordan kodene skulle brukes. Dette ble gjennomgått og kommentert i fellesskap. I tillegg var det ofte øvingsoppgaver som alle koderne skulle vurdere hver for seg.

Etterpå sammenliknet man de kodene man hadde valgt, drøftet vurderingene og holdt disse opp mot en internasjonal «fasit» som fastslo hvordan kodene skulle brukes på øvingsoppgavene.

Som en ytterligere kontroll ble det gjort tre typer ekstra koding:

- Omtrent en tredjedel av heftene var trukket ut til *reliabilitetskoding*, det vil si at to personer kodet disse heftene uavhengig av hverandre. På denne måten kunne man statistisk måle den nasjonale *sensorreliabiliteten*, det vil si graden av samsvar mellom koderne (sensorene) i et land.
- En del engelskspråklige elevbesvarelser var plukket ut til å bli kodet av to kodere fra hvert eneste deltakerland. På denne måten kunne man statistisk måle sensorreliabiliteten mellom land.
- En del besvarelser fra TIMSS Advanced 1995 på oppgaver som ble brukt på nytt i TIMSS Advanced 2008, var plukket ut til å bli kodet av to kodere fra hvert land. På denne måten kunne man statistisk måle sensorreliabiliteten over tid.

For de to siste typene koding var elevenes svar skannet inn elektronisk, og selve kodingen foregikk direkte ved innlegging av kode på datamaskin.

12.3.5 Databehandling

De innlagte dataene ble kontrollert i flere omganger, først i Norge og deretter i det internasjonale datasenteret til TIMSS. Dataene ble «vasket», det vil si at man lette etter inkonsistente og overraskende data. Disse ble så kontrollert mot oppgaveheftene og spørreskjemaene. Prosedyrene skal sikre høy grad av samsvar mellom det elevene, lærerne og skolelederne faktisk hadde svart, og de dataene som ble lagret elektronisk.

Da datavaskingen var avsluttet, ble alle forbindelser mellom de elektroniske dataene og deltakerne i undersøkelsen slettet. Dermed lar det seg ikke gjøre å spore enkeltresultater tilbake til elever eller skoler. Prosedyrene for Norge var godkjent av Datatilsynet.

12.3.6 Skalering

Avanserte statistiske metoder er brukt for å behandle dataene på en måte som muliggjør sammenlikninger. Dette er grundig beskrevet i den tekniske rapporten til TIMSS (Arora et al., 2009).

Som nevnt ovenfor svarte hver enkelt elev på mindre enn halvparten av det samlede oppgavetilfanget. Prestasjonene til to elever som hadde samme hefte, kan sammenliknes. To elever som fikk forskjellige hefter, fikk derimot helt eller delvis forskjellige oppgaver, og da kan ikke prestasjonene uten videre sammenliknes. Tilsvarende kan prestasjoner i 2008 ikke uten videre sammenliknes med prestasjoner i 1995 (eller 1998 for Norges del).

Disse problemene løses ved hjelp av oppgaver som er felles mellom hefter og mellom de to undersøkelsene. Disse trendoppgavene fungerer som «broer» som knytter de enkelte delene sammen.

Vi skjønner umiddelbart at prestasjonene i hefte 1 kan sammenliknes direkte med testen i 1995. Hefte 1 er jo, som vi har bemerket ovenfor, identisk med et av heftene i 1995. Prestasjonen til en elev som løser oppgavene i dette heftet i 2008, kan plasseres rett inn på den standardiserte skalaen fra 1995 (se nedenfor).

La oss eksempelvis se på en elev, vi kaller henne Helga, som fikk hefte 2. Hefte 2 inneholdt blokkene M4, M3 og M5 (se tabell 12.9). Blokk M3 fantes også i hefte 1. Med kunnskap om hvordan Helga presterte på blokk M3, og ut fra det statistiske materialet om hvordan elevene som fikk hefte 1, presterte, kan vi med stor sannsynlighet anslå hvordan Helga ville ha gjort det på blokkene M1 og M2 dersom hun i stedet hadde fått hefte 1. Dermed kan vi plassere Helga på skalaen fra 1995. Tilsvarende kan vi gjøre med elever som fikk hefte 3 eller 4. For Helga og enhver annen elev kan vi på denne måten anslå hvordan hun eller han ville ha gjort det på en stor test med samtlige oppgaver.

Et slikt resonnement er ganske usikkert for én enkelt elev. Men tilknytningen til de virkelige elevene er kuttet – det finnes ingen «Helga». Dataene kan ikke brukes til å si noe om enkeltelever. De blir bare anonyme representanter som kan hjelpe oss til å si noe om den nasjonale populasjonen eller deler av denne.

Når samtlige elever på denne måten har fått en totalskår for hele testen, kan vi regne ut gjennomsnittsskår og standardavvik for utvalget, og bruke det til å generalisere til hele populasjonen eller til deler av denne. For alle slike verdier er det beregnet *standardfeil*, som brukes til å avgjøre om forskjeller er *signifikante*.

Alle enkeltskårene ligger spredt omkring gjennomsnittet langs en skåringsakse. Da er det mulig å justere selve måleaksen. På samme vis som vi kan regne om temperaturer mellom celsius-verdier og fahrenheit-verdier, kan vi regne om skårene til nye verdier langs en ny skala. Vi får andre tall og et annet nullpunkt, men det er fortsatt den samme statistiske fordelingen.

En slik *skalering* ble gjort med dataene i TIMSS Advanced 1995. Elevskårene i alle deltakerlandene ble regnet om til en ny skala slik at det internasjonale gjennomsnittet ble 500 «poeng» og standardavviket ble 100 «poeng». Disse tallene er ikke poeng oppnådd på selve testen, men de er likevel mål for hvor godt elevene presterte. Slike skaleringer ble utført for både matematikk og fysikk.

Teknikkene som brukes for slik «brobygging» mellom undersøkelser baserer seg på *Item Response Theory* og er statistisk avanserte – atskillig mer avanserte enn beskrivelsen ovenfor kan gi inntrykk av. De er beskrevet i den internasjonale tekniske rapporten til TIMSS Advanced (Arora et al., 2009). «Brobyggingen» ble foretatt for alle de landene som deltok i både 1995 og 2008. Slik ble skalaen i 2008 definert i samsvar med skalaen fra 1995. De nye deltakerlandene i 2008 ble innpasset på denne skalaen. Siden Norge ikke deltok i 1995 – men gjennomførte undersøkelsen på egen hånd i 1998 – var ikke Norge med i denne skaleringen eller «brobyggingen».

Denne prosessen ga en skala som kan brukes som fast målestokk for prestasjoner i den første undersøkelsen i 1995, for TIMSS Advanced 2008, og for eventuelle nye TIMS Advanced-studier. Dette muliggjør trendanalyser.

Den internasjonale gjennomsnittsskåren var 500 per definisjon i 1995. I 2008 var den ikke lenger 500. Det kunne heller ikke forventes. For det første må vi forvente at de landene som hadde deltatt i 1995, ikke presterte akkurat likt i 2008. Viktigere er det likevel at det ikke var samme gruppe land som deltok i begge undersøkelsene. Noen land som deltok i 1995, uteble i 2008, og nye land kom til, se tabell 12.1. Det er ingen grunn til å forvente at én gruppe land skal prestere nøyaktig like godt i gjennomsnitt som en (delvis) annen gruppe land.

Å relatere prestasjoner til det internasjonale gjennomsnittet på den enkelte studien kan gi liten mening, siden et slikt gjennomsnitt vanligvis vil variere fra studie til studie. Kommer det inn et fattige land som presterer svakt – som for eksempel Filippinene denne gangen – vil det kunne trekke gjennomsnittet ned i forhold til en tidligere studie. Det ville være sterkt misvisende om en bedring i norske prestasjoner i forhold til det internasjonale gjennomsnittet på en studie ble framstilt som en framgang i forhold til en tidligere studie, mens det i virkeligheten skyldtes at gjennomsnittet hadde endret seg fordi nye land med svakere prestasjoner deltok. Dersom vi tenker oss at Singapore hadde deltatt i TIMSS Advanced 2008 istedenfor Filippinene, hadde utvilsomt totalbildet vært ganske annerledes. Men vurderingen av den norske utviklingen skal ikke avhenge av hvilke andre land som valgte å delta.

De prestasjonsdataene som foreligger, gir god anledning til å studere et enkelt lands utvikling over tid. Da sammenliknes landet med seg selv på den faste skalaen fra undersøkelse til undersøkelse. Sammenlikninger mellom land i samme undersøkelse er også meningsfulle. Dersom to eller flere land har deltatt i flere av undersøkelsene, kan landenes utvikling over tid også sammenliknes. Det som derimot gir liten mening, er å sammenlike prestasjoner for et land med de internasjonale gjennomsnittene fra undersøkelse til undersøkelse, siden disse altså varierer og er avhengige av hvilke land som deltar. I de internasjonale rapportene for TIMSS 2007 (Mullis, Martin & Foy, 2008; Martin, Mullis & Foy, 2008) og TIMSS Advanced 2008 (Mullis et al., 2009) har prosjektsenteret i Boston unnlatt å gjøre dette. I tabellene over deltakerlandenes gjennomsnittsskårer er det skalerte internasjonale snittet på 500 oppgitt, men ikke årets internasjonale gjennomsnitt. Samme valg er gjort i den norske rapporten fra TIMSS 2007 (Grønmo & Onstad, 2009) og i denne boka.

12.3.7 Analyser og rapportering

Det internasjonale prosjektsenteret for TIMSS Advanced har ansvaret for en første grundig gjennomgang og analyse av dataene fra samtlige deltakerland. Det er de som beregner vekter for dataene i alle land, og som foretar den internasjonale skaleringen av skårene. De har utgitt en teknisk rapport om gjennomføringen av studien og om hvordan dataene er behandlet (Arora et al., 2009). De har videre utgitt en rapport om de internasjonale resultatene (Mullis et al., 2009). Det enkelte land har ansvaret for å kontrollere at landets data som brukes i disse analysene er korrekte.

Til hjelp i analysene er det utviklet en del *samlevariabler*. Eksempler på slike er *faglig selvtillit*, *indre motivasjon* og *ytre motivasjon*. En samlevariabel er en slags sammenfatning av flere variabler. Etablering av en samlevariabel er en omfattende prosess som baserer seg både på faglig innsikt og på statistiske metoder. Med bakgrunn i erfaring og tidligere forskning vil man ofte anta at flere variabler måler aspekter av samme fenomen, det vil si at man antar at de sammen danner et naturlig og interessant *konstrukt*. Denne antakelsen blir testet med *korrelasjonsundersøkelser*, *regresjonsanalyser* og *eksplorerende faktoranalyse*, og i etterkant med *konfirmerende faktoranalyse*. På denne måten søker man å etablere et solid faglig og statistisk grunnlag for bruken av samlevariablene.

For den som er interessert i statistiske resonnementer og metoder som brukes i slike store studier, finnes det mye teori man kan sette seg inn i. Eksempler er bøkene *Introduction to classical and modern test theory* (Crocker & Algina, 1986) og *Statistics for social data analysis* (Knoke, Bohrnstedt & Mee, 2002).

I kapittel 9 har vi valgt å bruke *tonivåanalyser*. Vi studerer sammenhengen mellom prestasjoner og visse bakgrunnsvariabler. Det er ikke opplagt at en slik variabel vil ha samme virkning om vi sammenlikner elever med hverandre innenfor en klasse, eller om vi aggregerer på klassenivå og sammenlikner klasser med hverandre. Tonivåanalyse skiller mellom disse situasjonene. Noe forklaring er gitt i kapittelet.

Den norske prosjektgruppa har valgt å innføre noen såkalte *referanseland* til bruk i en del av de nasjonale analysene, nemlig Nederland, Italia, Slovenia og Sverige. Grunnlaget for valg av referanselandene er det redegjort for i slutten av kapittel 1.

De nasjonale rapportene har ulike omfang og innfallsvinkler. Noen er bare deskriptive, mens andre land skriver bøker hvor de presenterer resultatene i et forskningsperspektiv. Denne boka presenterer resultater fra de internasjonale analysene, samt resultatene fra ulike typer egne analyser, både av kvalitativ og av kvantitativ karakter. Resultatene er satt inn i og drøftet i et utdanningspolitisk og fagdidaktisk perspektiv som viktige bidrag til matematikkdidaktisk forskning i Norge.

Litteratur

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Evaluering av Reform 97. Endringer og utvikling ved L97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. Notodden, Telemarksforsking-Notodden.

Angell, C., Kjærnsli, M. & Lie, S. (1999). *Hva i all verden skjer i realfagene i videregående skole?* Oslo, Universitetsforlaget.

Arora, A., Foy, P., Martin, M. O. & Mullis, I. V. S. (2009). *TIMSS Advanced Technical Report*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Attewell, P. & Battle, J. (1999). Home Computers and School Performance. *The Information Society* 15(1), 1–10.

Bachmann, K. & Haug, P. (2006). *Forskning om tilpasset opplæring*, Forskingsrapport nr. 62, Høgskulen i Volda.

Bahrick, H. P. & Hall, L. K. (1991). Lifetime Maintenance of high school Mathematics Content. *Journal of Experimental Psychology*: General, 120(1), 20–33.

Beck, H. J. (1996). At føre et matematisk bevis. I Fosgerau, G. & Kristiansen, F. H. (red.), *Midt i matematikken*. Århus, Kvan, 57–76.

Bergem, O. K. (2009). *Individuelle versus kollektive arbeidsformer. En drøfting av aktuelle utfordringer i matematikkundervisningen i grunnskolen*. PhD-avhandling. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Björkquist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordisk matematikkdidaktikk* 1(1), 8–17.

Björkquist, O. (2001): Matematisk problemløsing. I B. Grevholm (red.), *Matematikk for skolen*. Bergen, Fagbokforlaget, 51–70.

Bjørnstad, R., Fredriksen, D., Gjelsvik, M. L. & Stølen, N. M. (2008). *Tilbud og etterspørsel etter arbeidskraft etter utdanning, 1986–2025*. Statistisk sentralbyrå. http://www.ssb.no/emner/06/90/rapp_200829/rapp_200829.pdf.

Bonesrønning, H. (2009) *Skole-, hjemmeressurser og medelevers betydning for skoleresultater og valg*. SØF-rapport 01/09. Trondheim, Senter for økonomisk forskning.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *KIM (Kvalitet i matematikkundervisningen): Veiledning til algebra*. Oslo, Nasjonalt Læremiddelsenter.

Brekke, G., Kobberstad, T., Lie, S. & Turmo, A. (1998). *Hva i all verden kan elevene i matematikk?* Oslo, Universitetsforlaget.

Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. New York, NY, Springer.

Brown, R. (2009). The use of the Graphing Calculator in High Stakes Examinations: Trends in Extended Response Questions over Time. I Winsløw, C. (red.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21.–April 25., 2008*. Rotterdam, Sense Publishers, 253–260.

Burstein, L. (1992). *The IEA Study of Mathematics III: Classroom Processes in Mathematics*. Oxford, Pergamon Press.

Carlgren, I., Klette, K., Myrdal, S., Schnack, K. & Simola, H. (2006). Changes in Nordic Teaching Practices: From Individualized Teaching to the Teaching of Individuals. *Scandinavian Journal of Educational Research* 50(3), 301–326.

Cobb, P. (2002). Theories of Knowledge and Instructional Design: A Response to Colliver. *Teaching and Learning in Medicine* 14(1), 52–55.

Cobb, P. (2007). Putting Philosophy to Work: Coping with Multiple Theoretical Perspectives. I Lester, F. K. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC, Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics, 3–38.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(3), 258–277.

Cockroft, W.H. (1982). *Mathematics Counts*. London, HMSO.

Colliver, J. A. (2002). Constructivism: The View of Knowledge That Ended Philosophy or a Theory of Learning and Instruction? *Teaching and Learning in Medicine* 14(1), 49–51.

Comber, L. C. & Keeves, J. P. (1973). *Science Education in Nineteen Countries*. New York, NY, Wiley & sons.

Cooper, H. (2001). *The Battle over Homework* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA, Corwin Press.

Corno, L. (1996). Homework is a Complicated Thing. *Educational Researcher* 25(8), 27–30.

Crocker, L. & Algina, J. (1986). *Introduction to Classical and Modern Test Theory.* New York, NY, Holt, Rinehart, and Winston, Inc.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of Linear Reasoning: An In-depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 311–334.

Dysthe, O. (2007). Læring og læringsreformer i Kunnskapsløftet. I Hølleland, H. (red.), *På vei mot kunnskapsløftet. Begrunnelser, løsninger og utfordringer*. Oslo, Cappelen Akademisk Forlag, 200–226.

Dysthe, O. (2008). Klasseromsvurdering og læring. *Bedre skole* 4, 16–23. Utdanningsakademiet.

Edvardsen, R. (1995). *Yrkesvalgmotiver. Resultater fra en undersøkelse om 16- og 18-åringers utdannings- og yrkesplaner i 1991*. Rapport 1/1995. Utredningsinstituttet for forskning og høyere utdanning, Oslo.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, NY, SUNY Press.

Ernest, P. (2000). Why Teach Mathematics? I White, J. & Bramall, S. (red.), *Why Learn Maths?* London, Institute of Education, London University.

Ernest, P. (2004). *The Psychology of Learning Mathematics. Advanced Course Module. Special Field: Mathematics Education*. Exeter, University of Exeter.

Falch, T. & Naper, L. R. (2008). *Lærerkompetanse og elevresultater i ungdomsskolen*, SØF-rapport 01/08.

Garden, R. A, Lie, S., Robitaille, D. F, Angell, C., Martin, M. O, Mullis, I. V. S, Foy, P. & Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Gardiner, A. (2004). *What is Mathematical Literacy?* Foredrag ved konferansen ICME-10, København, Danmark, juli 2004.

Goodlad, J. I. (1979). *Curriculum Inquiry. The Study of Curriculum Practice*. New York, NY McGraw-Hill.

Goodlad, J. I. (1986). The Domain of Curriculum and Their Study. Kapittel fra *Curriculum Inquiry* gjengitt i kompendium 3 fra PFI, Universitetet i Oslo. Redigert av Bjørg Brandtzæg Gundem.

Greeno, J. G., Collins, A. M. & Resnick, L. B. (1996). Cognition and Learning. I Berlinger, D. & Calfee, R. (red.), *Handbook of Educational Psychology*. London, Prentice Hall Int, 15–46.

Grøgaard, J. B., Helland, H. & Lauglo, J. (2008). *Elevenes læringsutbytte: Hvor stor betydning har skolen? En analyse av ulikhet i elevers prestasjonsnivå i fjerde, syvende og tiende trinn i grunnskolen og i grunnkurset i videregående*. Rapport 45/2008. Oslo, NIFU STEP.

Grønmo, L. S. (2000). Gender Differences Among Norwegian Students in Achievement, Attitudes and Self-Concepts. I Kaur, B., Edge, D. & Har, Y. B. (red.), *TIMSS and Comparative Studies in Mathematics Education. An International Perspective*. Singapore, National Institute of Education, Nanyang Technological University.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S. & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Oslo, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grønmo, L. S., Kjærnsli, M. & Lie, S. (2004). *Looking for Cultural and Geographical Factors in Patterns of Responses to TIMSS Items*. Paper presented at the 1st IEA International Research Conference, May 11–13, 2004, Lefkosia, Cyprus.

Grønmo, L. S. (2005). Ferdighetenes plass i matematikkundervisningen. *Nämnaren* (4), 38–44.

Grønmo, L. S. & Throndsen, I. S. (2006). Læringsstrategier i matematikk. I Elstad, E. & Turmo, A. (red.), *Læringsstrategier: søkelys på lærernes praksis*. Oslo, Universitetsforlaget, 178–195.

Grønmo, L. S. & Olsen, R.V. (2006). *TIMSS VERSUS PISA: The Case of Pure and Applied Mathematics*. Paper presented at the 2nd IEA International Research Conference, November 9–11, 2006, Washington D.C, United States.

Grønmo, L. S. & Bergem, O. K. (2009). Et matematikkdidaktisk perspektiv på TIMSS. I Grønmo, L.S., & Onstad, T. (red.), *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo, Unipub, 33–48.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo, Unipub.

Grønmo, L. S. (2010). Low Achievement in Mathematics in Compulsory School as Evidenced by TIMSS and PISA. I Sriraman, B., Bergsten, C., Goodchild, S., Pálsdóttir, G., Dahl, B. & Haapasalo, L. (red.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*. Charlotte, NC, Information Age Publishing, 49–69.

Grønmo, L. S. & Gustafsson, J. E. (2010). *Student Achievement in Mathematics – in Norway an Sweden 1995–2008*. Paper på The 4th IEA International Research Conference (IRC). Gøteborg, In Press.

Gundem, B. B. (1990). *Læreplanpraksis og læreplanteori*. Oslo, Universitetsforlaget.

Gustafsson, J.-E., & Stahl, P.-A. (2005). *Streams 3.0 User's Guide*. Mölndal, Sweden. MultivariateWare.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. I Puig, L. & Gutierrez, A. (red.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 1, 21–34.

Hanna, G. (2008). *Beyond Verification: Proof can teach new methods*. Ontario Institute for Studies in Education, University of Toronto. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/HANNA.pdf.

Harmon, M., Smith, T. A., Martin, M. O., Kelly, D. L., Beaton, A. E., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J. & Orpwood, G. (1997). *Performance Assessment in IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College.

Hattie, J. A. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. New York, Routledge.

Haug, P. (2007). *Begynnaropplæring og tilpassa undervisning – kva skjer i klasserommet?* Bergen, Caspar Forlag AS.

Henriksen, E. K. & Schreiner, C. (2009). Vilje-con-valg: Å velge eller ikke velge realfag. *Naturfag* (2), 92–96.

HMI (1985) *Mathematics from 5 to 16*. London, HMSO.

Howie, S. J. & Plomp, T. (2006). *Contexts of Learning Mathematics and Science – Lessons Learned from TIMSS*. New York, NY, Routledge.

Husén, T. (1967). *International Study of Achievement in Mathematics: a Comparison of Twelve Countries*. New York, NY, Wiley & sons.

Hægeland, T., Kirkebøen, L. J. & Raaum, O. (2005). *Skoleresultater 2004. En kartlegging av karakterer fra grunn- og videregående skoler i Norge*. SSB-notater 2005/31. Oslo - Kongsvinger, Statistisk sentralbyrå.

Hægeland, T., Kirkebøen, L. J. & Raaum, O. (2006). *Skoleresultater 2005. En kartlegging av karakterer fra grunn- og videregående skoler i Norge*. SSB-notater 2006/35. Oslo - Kongsvinger, Statistisk sentralbyrå.

Hægeland, T., Kirkebøen, L. J. & Skogstrøm, J. F. B. (2007). *Realfagskompetanse fra videregående opplæring og søkning til høyere utdanning*. Rapport 2007/30. Oslo - Kongsvinger, Statistisk sentralbyrå.

IEA (1988). *Science Achievement in Seventeen Countries: A Preliminary Report*. Oxford, Pergamon Press.

Imsen, G. (2003a). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo, Universitetsforlaget.

Imsen, G. (2003b). *Skolemiljø, læringsmiljø og elevutbytte. En empirisk studie av grunnskolens 4., 7. og 10. trinn: Evaluering av Reform 97*. Trondheim, Tapir forlag.

Jenssen, E. S. & Lillejord, S. (2009). Tilpasset opplæring: politisk dragkamp om pedagogisk praksis. *Acta Didactica Norge*, 3(1).

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Kristoffersen, L. (2006). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo, Abstrakt forlag.

KD (2006a). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. Midlertidig utgave juni 2006. Oslo, Kunnskapsdepartementet.

KD (2006b). *Et felles løft for realfagene. Strategi for styrking av realfagene 2006–2009*. Midlertidig utgave 2006, http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/rapporter_planer/planer/2006/Et-felles-loft-for-realfagene.html?id=271539, Kunnskapsdepartementet.

KD (2006c). *Matematikk for realfag – Programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram*. http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=168732, Kunnskapsdepartementet.

KD (2006–2007). *Stortingsmelding nr. 16 ... og ingen sto igjen. Tidlig innsats for livslang læring*. http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/regpubl/stmeld/2006-2007/Stmeld-nr-16-2006-2007-.html?epslanguage=NO, Kunnskapsdepartementet.

KD (2007–2008). *Stortingsmelding nr. 31, Kvalitet i skolen*. http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/regpubl/stmeld/2007-2008/stmeld-nr-31-2007-2008 .html?id=516853, Kunnskapsdepartementet.

KD (2008–2009). *Stortingsmelding nr. 11, Læreren. Rollen og utdanningen*. http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/regpubl/stmeld/2008-2009/stmeld-nr-11-2008-2009-.html?id=544920, Kunnskapsdepartementet.

KD (2010). *Realfag for framtida. Strategi for styrking av realfagene 2010–2014*. http://www.regjeringen.no/upload/KD/Vedlegg/Strategi-%20Realfag%20for%20framtida.pdf, Kunnskapsdepartementet.

Kilpatrick, J. (1987). *What Constructivism Seems to Be*. Proceedings of the 11th PME 1, 6–26.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC, National Academy Press.

Kind, P. M., Kjærnsli, M., Lie, S. & Turmo, A. (1999). *Hva i all verden gjør elevene i realfag?* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Kjærnsli, M., Lie, S., Stokke, K. H. & Turmo, A. (1999). *Hva i all verden kan elevene i naturfag? Oppgaver med resultater og kommentarer*. Oslo, Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A. & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Oslo, Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V. & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006*. Oslo, Universitetsforlaget.

Klette, K. (2003). *Klasserommets praksisformer etter reform 97*. Pedagogisk forskningsinstitutt, Universitetet i Oslo.

Klette, K. (2004). Lærerstyrt kateterundervisning fremdeles dominerende? Aktivitets- og arbeidsformer i norske klasserom etter Reform 97. I Klette, K. (red.), *Fag og arbeidsmåter i endring? Tidsbilder fra norsk grunnskole*. Oslo, Universitetsforlaget, 21–37.

Klette, K. (2007). Bruk av arbeidsplaner i skolen – et hovedverktøy for å realisere tilpasset opplæring? *Norsk Pedagogisk Tidsskrift* 91(4), 344–358.

Klette, K., Lie, S., Ødegaard, M., Anmarkrud, Ø., Arnesen, N., Bergem, O. K. & Roe, A. (2008). *PISA+: Lærings- og undervisningsstrategier i skolen*. Oslo, Norges forskningsråd.

Knoke, D., Bohrnstedt, G. W. & Mee, A. P. (2002). *Statistics for Social Data Analysis*. Itasca, Ill., F.E. Peacock Publishers.

KUF (1994). *Læreplanverket for videregående opplæring (R94)*. Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet. http://www.utdanningsdirektoratet.no/Artikler/_Lareplaner/Lareplanverket-for-videregaende-opplaring-R94/.

KUF (1998–1999). *Stortingsmelding nr. 28*, *Mot rikare mål. Om einskapsskolen, det likeverdige opplæringstilbodet og ein nasjonal strategi for vurdering og kvalitetsutvikling i grunnskolen og den vidaregåande opplæringa*. http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/regpubl/stmeld/19981999/stmeld-nr-28-1999-.html?id=192278, Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

KUF (1999). *Læreplan for videregående opplæring, Matematikk. Felles allment fag i alle studieretninger*. Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

KUF (2000). *Læreplan for videregående opplæring, Matematikk. Studieretningsfag i studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag*. Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

Lagerstrøm, B. O. (2007). *Kompetanse i grunnskolen. Hovedresultater 2005/2006*. Rapport 2007/21. Oslo - Kongsvinger, Statistisk sentralbyrå.

Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations*, Cambridge, Cambridge University Press.

Leino, K. (2003). Computer Usage and Reading Literacy. I Lie, S., Linnakylä, P. & Roe, A.(red.), *Northern Lights on PISA. Unity and diversity in Nordic countries in PISA 2000*. Oslo, Department of Teacher Education and School Development, University of Oslo, 71–82.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in Mathematics Learning: A challenge to the Radical Constructivist Paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133–150.

Lerman, S. & Zevenbergen, R. (2004). The Socio-Political Context of the Mathematics Classroom: Using Bernstein's Theoretical Framework to Understand Classroom Communication. I Valero, P. & Zevenbergen, R. (red.), *Researching the Socio-political Dimensions of Mathematics Education. Issues of Power in Theory and Methodology*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 215–224.

Lie, S., Kjærnsli, M. & Brekke, G. (1997a). *Hva i all verden skjer i realfagene? Internasjonalt lys på trettenåringers kunnskaper, holdninger og undervisning i norsk skole*. Oslo, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Lie, S., Kjærnsli, M. & Brekke, G. (1997b). *9-åringers kunnskaper og holdninger i realfag i et internasjonalt perspektiv. TIMSS-rapport nr. 25*, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Lie, S., Roe, A., Kjærnsli, M. & Turmo, A. (2001). *Godt rustet for framtida? Norske 15-åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv*. Oslo, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Lie, S., Angell, C. & Rohatgi, A. (2010). *Fysikk i fritt fall? TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo, Unipub.

Lundgren, U. P. (1979). *Att organisera omvärlden. En introduktion till läroplansteori*. Stockholm, Liber forlag.

Lundgren, U. P., Svingby, G. & Wallin, E. (1983). *Makten över läroplaner.* Högskolan för lärarutbildning i Stockholm, Institutionen för pedagogik.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. I Gutierrez. A. & Boero, P. (red.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam, Sense Publishers.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J., Gregory, K. D., Smith, T. A., Chrostowski, S. J., Garden, R. A. & O'Connor, K. M. (2000). *TIMSS 1999 International Science Report. Findings from IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J. & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Science Report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S. & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Science Report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E, Gonzalez, E. J, Kelly, D. L. & Smith, T. A. (1998). *Mathematics and Science Achievement in the Final Year of Secondary School: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Gregory, K. D., Garden, R. A., O'Connor, K. M., Chrostowski, S. J. & Smith, T. A. (2000). *TIMSS 1999 International Mathematics Report. Findings from IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Lynch School of Education.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J. & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A. & Erberber, E. (2005). *TIMSS 2007 Assessment Frameworks*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Olson, J. F. Berger, D. R., Milne, D. & Stanco, G. M. (2008). *TIMSS 2007 Encyclopedia: A Guide to Mathematics and Science Education Around the World*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Robitaille, D. F. & Foy, P. (2009). *TIMSS Advanced International Report*. Chestnut Hill, MA, TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Muthén, LO. K. & Muthén, B. O. (1998–2007). *Mplus User's Guide. Fifth edition*. Los Angeles, CA, Muthén & Muthén.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2009). *Focus in High School Mathematics, Reasoning and Sense making*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2003). Mål for matematikkundervisningen. I Grevholm, B. (red.), *Matematikk for skolen*. Bergen, Fagbokforlaget, 288–334.

NOKUT (2008). *Evaluering av ingeniørutdanningen i Norge 2008. Sammendrag av viktige konklusjoner og anbefalinger*. www.nokut.no.

Nordenbo, S. E., Søgaard Larsen, M., Tiftikçi, N., Wendt, R. E. & Østergaard, S. (2008). *Teacher competences and pupil achievement in pre-school and school*. A systematic review carried out for The Ministry of Education and Research, Oslo. Technical report, Danish Clearinghouse for Educational Research, Copenhagen.

Nævdal, F. (2004). Skoleprestasjoner, kjønn og bruk av hjemme-PC. *Tidsskrift for ungdomsforskning 2004*, 4(1), 67–82.

Olsen, R. V., Turmo, A. & Lie, S. (2001). Learning about Students' Knowledge and Thinking in Science through Large-Scale Quantitative Studies. *European Journal of Psychology of Education*, 16(3), 403–420.

Olsen, R. V. & Grønmo, L. S. (2006). What are the Characteristics of the Nordic Profile in Mathematical Literacy? I Mejding, J. & Roe, A. (red.), *Northern Lights on PISA 2003 – a reflection from the Nordic countries*. Oslo, Nordisk Ministerråd, 47–58.

Olsrud, H. G. (2009). *Bevisets plass i norske læreplaner. En historisk oversikt og drøfting av matematiske bevis i videregående skole*. Masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Onstad, T. & Grønmo, L. S. (2009). Rammeverk og metoder. I Grønmo, L. S. & Onstad, T. (red.), *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo, Unipub, 243–275.

Ostad, S. A. (1992). Bærekraftige matematikkunnskaper – en funksjon av ferdighet eller forståelse? *Norsk Pedagogisk Tidsskrift*, 6, 320–326.

Persson, P. E. (2009). The Influence of Calculators on Students' Learning of Algebra – a Literature Review. I Winsløw, C. (red.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen*, April 21.–April 25. 2008. Rotterdam, Sense Publishers, 261–268.

Phillips, D. C. (1995). The Good, the Bad, and the Ugly: The Many Faces of Constructivism. *Educational Researcher*, 24(7), 5–12.

Postlethwaite, T. N. & Wiley, D. E. (1992). T*he IEA Study of Science II: Science Achievement in Twenty-three Countries*. Oxford, Pergamon Press.

Ramberg, I. (2006). *Realfag eller ikke? Elevers motivasjon for valg og bortvalg av realfag i videregående opplæring*. Oslo, NIFU STEP.

Rasch-Halvorsen, A. & Johnsbråten, H. (2006). *Norsk matematikkråds undersøkelse: Høsten 2005*. Høgskolen i Telemark avd. EFL Notodden.

Rasch-Halvorsen, A. & Johnsbråten, H. (2007). *Norsk matematikkråds undersøkelse: Høsten 2007*. Høgskolen i Telemark avd. EFL Notodden.

Robitaille, D. F. & Garden, R. A. (1989). *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School Mathematics*. Oxford, Pergamon Press.

Robitaille, D. F, McKnight, C., Schmidt, W., Britton, E., Raizon, S. & Nicol, C. (1993). *TIMSS Monograph No.1: Curiiculum Frameworks for Mathematics and Science*. Vancouver, B.C, Pacific Educational Press.

Rosier, M. J. & Keeves, J. P. (1991). *The IEA Study of Science I: Science Education and Curricula in Twenty-three Countries*. Oxford, Pergamon Press.

Sandmel, T. (2000) Matematikkfilosofi. I Gjone G. & Onstad T. (red.), *Mathema* 2000. Oslo, NKS-forlaget, 148–157.

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Jasper, P. & Nordseth, T. (1995). *Matematikk 2MX*. Oslo, Gyldendal Norsk Forlag.

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Flakstad, H., Gravem, B., Jasper, P. & Nordseth, T. (2001). *Matematikk 2MX: Formel og fakta*. Oslo, Gyldendal Norsk Forlag.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I Grouws, D. A. (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, MacMillan, 334–370.

Schreiner, C. & Sjøberg, S. (2005). *Et meningsfullt naturfag for dagens ungdom*? http://folk.uio.no/sveinsj/Nordina2-Schreiner-Sjoberg.pdf.

Schreiner, C. & Sjøberg, S. (2006). *Jeg velger meg naturfag! (...Hvem gjør egentlig det?)*. Rapport utarbeidet for Norges forskningsråd.

Sensevy, G., Tiberghien, A., Santini, J., Laubé, S. & Griggs, P. (2008). An Epistemological Approach to Modeling: Case Studies and Implications for Science Teaching. *Science Education* 92(3), 424–446.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1–36.

Sfard, A. (1998). On Two Metaphors for Learning and the Danger of Choosing just One. *Educational Researcher* 27(2), 4–13.

Sfard, A. (2000). On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. *Mathematical Thinking and Learning* 2(3), 157–189.

Sfard, A. (2006). Participationist Discourse on Mathematics Learning. I Maascz, J. & Schloeglmann, W. (red.), *New Mathematics Education Research and Practice*. Rotterdam, Sense Publishers, 153–170.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture and Activity* 8(1), 42–76.

Sjøberg, S. (1986). *Elever og lærere sier sin mening: naturfag og norsk skole*. Oslo, Universitetsforlaget.

Skagen, K. (2002). *Pedagogikkens elendighet. Ukorrekte artikler på randen av litteratur*. Kristiansand, Høyskoleforlaget.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Solvang, R. (1986). *Bevismetodikk*. Oslo, Pedagogisk seminar.

Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. I Lester, F. K. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC, Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics.

Steffensen, K. & Ziade, S. E. (2009). *Skoleresultater 2008. En kartlegging av karakterer fra grunnskoler og videregående skoler i Norge*. Rapport 2009/23. Kongsvinger, Statistisk sentralbyrå.

Säljö, R. (2006). *Læring og kulturelle redskaper. Om læreprosesser og den kollektive hukommelsen*. Oslo, Cappelen Akademisk Forlag.

Trautwein, U. (2007). The homework–achievement relation reconsidered: Differentiating homework time, homework frequency, and homework effort. *Learning and Instruction* 17(3), 372–388.

Travers, K. J. & Westbury, I. (1989). *The IEA Study of Mathematics I: Analysis of Mathematics Curricula*. Oxford, Pergamon Press.

Trigueros, M. & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? I Zaslavsky, O. (red.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, Vol. 4, 273–280.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2004). How do High School Students Interpret Parameters in Algebra? I Hoines, M. J. & Fuglestad, A. B. (red.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, Vol. 4, 361–368.

Utdanningsdirektoratet (2009). *Utdanningsspeilet 2008. Analyse av grunnskole- og videregående opplæring i Norge*. Oslo, Utdanningsdirektoratet.

Utdanningsdirektoratet (2010). *Vurderingsveiledning. Matematikk, sentralt gitt eksamen. Studieforberedende og yrkesfaglige utdanningsprogram. Kunnskapsløftet LK06*. http://www.udir.no/Artikler/_Eksamen/Vurderings--og-sensorveiledninger-VGO/.

Van Oers, B. (2000). The Appropriation of Mathematical Symbols: A Psychosemiotic Approach to Mathematics Learning. I Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. (red.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, 133–176.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. I Cobb, P. & Bauersfeld, H. (red.), *The Emergence of Mathematical Meaning*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Vygotsky, L.S. (2001). *Tenkning og tale*. Oslo, Gyldendal Akademisk.

Waschescio, U. (1998). The missing link: Social and cultural aspects in social constructivist theories. I Seeger, F., Voigt, J. & Waschescio, U. (red.), *The Culture of the Mathematics Classroom*. Cambridge, Cambridge University Press, 221–244.

Wu, H. (1999). Basic Skills Versus Conceptual Understanding. A Bogus Dichotomy in Mathematics Education. *American Educator* 23(3), 14–19.

Vedlegg
Læreplanene i Matematikk for 3MX under Reform 94 – en sammenlikning mellom 1994-versjonen og 2000-versjonen[6]

Det er en betydelig forskjell mellom de to læreplanversjonene av 3MX i Reform 94. Den første versjonen kom med reformen i 1994. Deretter fikk grunnskolen sin nye læreplan L97 i 1997, og dermed ble det nødvendig å justere læreplanene også i videregående skole. Dette gjaldt spesielt for matematikk. Den reviderte versjonen av læreplanen for 2MX og 3MX ble godkjent i juli 2000. Revisjonen gikk atskillig lenger enn det forandringene i grunnskolen krevde. Mye stoff ble tatt ut av 3MX og nytt ble tilføyd. Mange av forandringene i 3MX skyldtes at emner som før var en del av 2MX nå ble flyttet til 3MX og omvendt.

Nedenfor gis en kortfattet gjennomgang av endringene i læreplanen for 3MX. Endringer i læreplanen for 2MX kommenteres også der dette er hensiktsmessig. De uthevede målene er hentet fra 2000-versjonen av læreplanen for 3MX, og framstillingen tar således utgangspunkt i denne.

Mål 1: Kultur, språk og kommunikasjon

Innholdet i dette hovedmålet er omtrent likt i de to læreplanversjonene, selv om noen delmål er ulikt formulert. Tanken om samarbeid og diskusjon mellom elever er mest framtredende i 1994-utgaven.

6 Dette vedlegget baserer seg på et notat skrevet av Harald Solbakken.

Mål 2: Modellering, eksperimentering og utforsking

I 1994 var hovedmålet formulert som *Modellbygging og problemløsning*. Versjonen fra 2000 inneholder flere delmål enn 1994-utgaven.

Formuleringene i 2000 er «aktive» og legger vekt på eksperimentering og oppdagelse av mønstre og sammenhenger. Det skyldes at en i større grad tar i bruk teknologiske verktøy. (Samtidig med læreplanrevisjonen ble det drevet forsøk med «IKT-varianter» av blant annet 3MX. Forsøkene illustrerte noen av de mulighetene som fantes med teknologiske verktøy som datamaskin, symbolregner og grafisk kalkulator.)

Mål 3: Rekker

Dette temaet var ikke med i 1994-utgaven av 3MX. Temaet lå i sin helhet i daværende 2MX. Stoffet var da begrenset til aritmetiske og geometriske rekker.

I den nye utgaven (2000) skal elevene også kunne bruke kalkulator til å summere generelle sekvenser av tall, samt kunne bruke rekker til å utforske geometriske forhold og mønstre. Sparing og avbetaling er nevnt spesielt. I 1994-utgaven av 2MX ble dette formulert noe åpnere som å «kunne løse praktiske problemer ved bruk av rekker».

I skolehverdagen ble innholdet i nye 3MX omtrent det samme som i gamle 2MX innenfor rekker.

Mål 4: Trigonometriske funksjoner

Funksjonslæren i 2000-planen skiller seg kraftig fra 1994-utgaven. I nye 3MX er funksjoner begrenset til trigonometriske funksjoner.

I 1994-utgaven av 3MX skulle elevene fordype seg i logaritme- og eksponentialfunksjoner. Fra 2000 ble dette stoffet flyttet til 2MX og skulle ikke lenger prøves særskilt i 3MX. Dette la sterke begrensninger på eksamensoppgavene i 3MX.

Trigonometriske funksjoner var i hovedsak lagt til 2MX før revisjonen, men ble flyttet til 3MX i 2000-planen. Fordypningen i trigonometri ble større etter 2000 enn før, og fordypningen i andre funksjonstyper kan da ha blitt svekket, spesielt på tredje årstrinn.

Geometri med bruk av sinus, cosinus og tangens ble delt mellom 2MX og 3MX ved revisjonen i 2000. Tidligere lå det meste av dette stoffet i 2MX.

Mål 5: Integralregning

I 1994-planen lå alt om integral i 3MX. Fra 2000 ble en del av stoffet flyttet til 2MX. Det gjaldt blant annet integral av potensfunksjoner, polynomfunksjoner og eksponentialfunksjoner, samt en del praktiske anvendelser.

Integrasjonsmetoder – som substitusjon og delvis integrasjon – og volumberegning ble værende i 3MX. Metoden med delbrøkoppspalting var med i 3MX fra 1994, men ble tatt ut ved revisjonen i 2000.

Førsteordens differensiallikninger med konstante koeffisienter var med i 3MX-planen fra 1994, men kom ikke med i 2000-planen.

Mål 6: Vektorer og vektorfunksjoner

I planen fra 1994 var temaet vektorer samlet i 3MX. Fra 2000 ble vektorregning i to dimensjoner flyttet til 2MX (ikke minst etter ønske fra fysikerne). Den tredimensjonale vektorregningen og romgeometrien ble beholdt i 3MX, men vektorproduktet (kryssproduktet) ble tatt ut.

Kurver framstilt i polarkoordinater ble et nytt og forholdsvis omfattende emne i 3MX fra 2000. I tillegg ble det innført parametriserte kurver i planet og i rommet, samt vektorfunksjoner med derivert. Disse skulle brukes til å finne hastighet, akselerasjon og buelengde.

Planen fra 1994 inneholdt en del analytisk geometri for ellipse, parabel og hyperbel. Dette ble tatt ut ved revisjonen i 2000. Sirkel og kuleflate ble beholdt, men begrepet *geometrisk sted* ble tatt ut.

Mål 7: Sannsynlighetsregning og statistikk

Emner i kombinatorikk, sannsynlighetsregning og statistikk har hatt en omfattende plass i både 2MX og 3MX i begge versjoner av læreplanen. Planen fra 1994 har med hypotesetesting. Dette temaet gikk ut ved revisjonen. Til gjengjeld kom det inn mer stoff om statistiske fordelinger, inklusive normalfordelingen, og mer vekt på begreper som standardfeil og konfidensintervall.

Noen utfyllende kommentarer

Begrepene *asymptote* og *asymptotefunksjon* er ikke tatt med i noen av læreplanene.

Det teoretiske grunnlaget for differensialregningen var i hovedsak lagt til 2MX, både før og etter revisjonen i 2000. Sentrale begreper som grenseverdi og kontinuitet ble imidlertid sterkere vektlagt i planen fra 1994.

Sammenhengen mellom *deriverbarhet og kontinuitet* er knapt nevnt i 2000-versjonen av læreplanen. I 1994-utgaven kreves det derimot i mål 6b i 2MX at elevene skal kunne avgjøre ut fra grafen hvor en funksjon er kontinuerlig og hvor den er deriverbar.

Om forfatterne

Liv Sissel Grønmo er førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved ILS på UiO. Hun har i flere år vært forskningsleder ved ILS og er norsk prosjektleder for flere internasjonale komparative studier av matematikk og naturfag: TIMSS 2003, 2007 og 2011 om matematikk og naturfag i grunnskolen, TIMSS Advanced 2008 om matematikk og fysikk i det siste året av videregående skole, og TEDS-M 2008 om utdanning av matematikklærere. Før hun ble tilsatt som forsker ved ILS, har Grønmo mange års erfaring som lærer og kommunal veileder i matematikk og naturfag og i bruk av datateknologi i undervisningen. Hun har arbeidet med grunn- og videreutdanning av matematikklærere og har holdt en rekke kurs for lærere og skoleledere. Hennes forskningsinteresser er utvikling av matematisk kompetanse med vekt på aritmetikk og algebra, og med et spesielt fokus på forholdet mellom ren og anvendt matematikk.

Torgeir Onstad er cand.real. i matematikk og er tilsatt som førstelektor i matematikkdidaktikk ved ILS. Han har arbeidet som lektor i videregående skole i en rekke år, både i Norge og i Tanzania. I perioden fra 1988 til 1993 var han tilsatt ved Matematisk institutt på UiO som et bindeledd mellom skole og fagmiljø. Fra 1993 arbeidet han som fagdidaktiker i universitetets lærerutdanning. Han har fra 2006 hatt en sentral rolle både faglig og administrativt i de internasjonale komparative studiene TIMSS, TIMSS Advanced og TEDS-M. Onstad har holdt en rekke etterutdanningskurs, gjesteforelesninger og populærvitenskapelige foredrag i Norge, kurs i Palestina og Tanzania, og gjesteforelesninger i Tsjekkoslovakia, India, Malaysia og Zambia. Han har deltatt i flere forskningsprosjekter i samarbeid med universiteter i Afrika, og har særlig arbeidet med matematikkens historie og med etnomatematikk.

Ida Friestad Pedersen er cand.scient. i matematikk og er tilsatt som stipendiat i matematikkdidaktikk ved ILS. Hun har tidligere arbeidet som lektor i videregående skole. I sitt PhD-prosjekt studerer Pedersen algebrakompetansen til elever som har valgt matematikk fordypning i den videregående skolen. Deler av avhandlingen hennes vil være basert på data fra TIMSS Advanced.